پاسخنامه
ریاضی
هندسه تحلیلی

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم چی

1 – گزینهٔ «۳» *(سروش موئینی)*

فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow OH=\frac{k}{\sqrt{(k-1)^2+2^2}}$$

داریم:

$$\frac{|k|}{\sqrt{k^2-2k+5}}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{k^2}{k^2-2k+5}=\frac{1}{4}\Rightarrow 3k^2+2k-5=0$$

این معادله دو جواب دارد که مجموع آنها $S=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{3}$ خواهد بود.

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

---

2 – گزینهٔ «۲» *(مهدی براتی)*

قرینهٔ نقطهٔ M را نسبت به نقطهٔ N نقطهٔ M' می‌نامیم. با توجه به شکل مقابل چون N وسط M و M' قرار دارد، داریم:

$$\frac{x_M+x_{M'}}{2}=x_N\Rightarrow x_{M'}=2x_N-x_M$$

$$\Rightarrow x_{M'}=2(2a)-(3a+1)=a-1$$

$$\frac{y_M+y_{M'}}{2}=y_N\Rightarrow y_{M'}=2y_N-y_M$$

$$\Rightarrow y_{M'}=2(2-a)-(a+3)=-3a+1$$

$$\Rightarrow M'=(a-1,-3a+1)$$

چون نقطهٔ M' روی خط $2x-3y=6$ قرار دارد، مختصات آن در این معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow 2(a-1)-3(-3a+1)=6\Rightarrow 11a-5=6\Rightarrow a=1$$

بنابراین مختصات نقاط M و N و فاصلهٔ آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$M(4,4)\ ,\ N(2,1)\Rightarrow MN=\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{13}$$

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴ تا ۸)

---

3 – گزینهٔ «۲» *(پویا طهرانیان)*

دو ضلع مربع مقابل هم و در نتیجه موازی یکدیگرند، پس:

$$\left.\begin{array}{l}\text{شیب خط اول}:\ \frac{-k}{2}\\ \text{شیب خط دوم}:\ \frac{1}{3}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{دو خط موازی هم‌اند}}\frac{-k}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow k=\frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{خط اول}\ \frac{2}{3}x-2y+3=0\ ,\quad \text{خط دوم}\ x-3y-1=0$$

$$\times 3\ \rightarrow 2x-6y+9=0\qquad \times 2\ \rightarrow 2x-6y-2=0$$

حال فاصلهٔ دو خط موازی یعنی دو ضلع روبه‌روی مربع برابر قطر دایره است پس با توجه به رابطهٔ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ داریم:

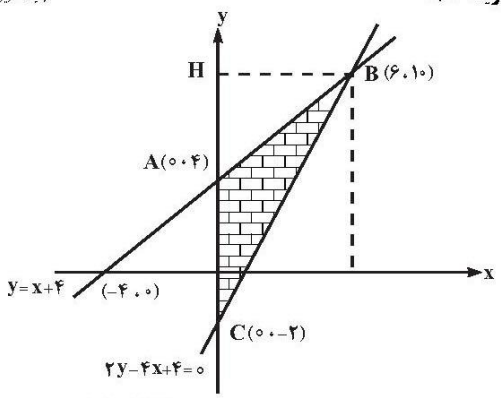
$$\text{قطر دایره}=\frac{|9-(-2)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\frac{11}{2\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{2\sqrt{10}}=\frac{11}{4\sqrt{10}}\Rightarrow S_{\text{دایره}}=\pi\left(\frac{11}{4\sqrt{10}}\right)^2=\frac{121\pi}{160}$$

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

4 – گزینهٔ «۳» *(نیما کریوریان)*



$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AC\times BH}{2}=\frac{6\times 6}{2}=18$$

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۴)

---

5 – گزینهٔ «۳» *(نیما کریوریان)*

فرض می‌کنیم نقطهٔ M روی خط $2x+y=1$ قرار دارد:

$$2x+y=1\xrightarrow{x=\alpha}y=1-2\alpha\Rightarrow M(\alpha,1-2\alpha)$$

معادلهٔ خط d برابر است با: $y-2=2(x-1)\Rightarrow y=2x$

فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط d:

$$MH=\frac{|y-2x|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{|1-2\alpha-2\alpha|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow|1-4\alpha|=5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-4\alpha=5\Rightarrow\alpha_1=-1\\ 1-4\alpha=-5\Rightarrow\alpha_2=\frac{3}{2}\end{cases}$$

مختصات دو نقطهٔ قابل قبول M به‌صورت $(-1,3)$ و $(\frac{3}{2},-2)$ است که فاصلهٔ آن‌ها از همدیگر برابر است با:

$$\sqrt{(3-(-2))^2+(-1-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

6 – گزینهٔ «۱» *(مهانیش نیکنام)*

چون مثلث قائم‌الزاویه است AB و AC برهم عمودند و بنابراین:

$$m_{AB}=\frac{2k-7}{k-1}\ \text{و}\ m_{AC}=\frac{2k-3}{k+1}$$

$$m_{AB}\times m_{AC}=-1\Rightarrow\frac{2k-7}{k-1}\times\frac{2k-3}{k+1}=-1$$

$$\Rightarrow 4k^2-20k+21=-k^2+1\Rightarrow 5(k^2-4k+4)=0$$

$$\Rightarrow k=2\Rightarrow A(2,3)$$

معادلهٔ BC: $m_{BC}=2\Rightarrow y-6=2(x-1)\Rightarrow y=2x+4$

ارتفاع وارد بر وتر: $AH=\frac{|3-4-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

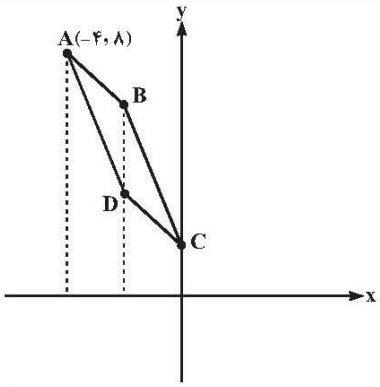
---

7 – گزینهٔ «۲» *(مهدی براتی)*

با توجه به شکل رسم شده واضح است که برای محاسبهٔ BD (قطر کوچک‌تر) باید مختصات نقاط B و D را پیدا کرد.

ابتدا معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم (موازی خط $y=-x+2$)

www.mapedu.ir



$$\begin{cases} m_{AB} = -۱ \\ A(-۴,۸) \end{cases} \Rightarrow y - ۸ = -(x+۴) \Rightarrow y = -x + ۴$$

حالا برای یافتن مختصات نقطهٔ B، خط AB را با خط $y = -۲x + ۲$ تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = -x + ۴ \\ y = -۲x + ۲ \end{cases} \Rightarrow -x + ۴ = -۲x + ۲ \Rightarrow x = -۲$$

$$\Rightarrow y = ۶ \Rightarrow B(-۲,۶)$$

می‌دانیم که رابطهٔ زیر بین مختصات رأس‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است:

$$A + C = B + D$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

پس برای یافتن مختصات نقطهٔ D داریم:

$$\begin{cases} -۴ + ۰ = -۲ + x_D \Rightarrow x_D = -۲ \\ ۸ + ۲ = ۶ + y_D \Rightarrow y_D = ۴ \end{cases} \Rightarrow D(-۲,۴)$$

حال طول دو قطر AC و BD را می‌یابیم:

$$AC = \sqrt{(۰+۴)^۲ + (۸-۲)^۲} = \sqrt{۵۲}$$

$$BD = \sqrt{(-۲+۲)^۲ + (۶-۴)^۲} = ۲$$

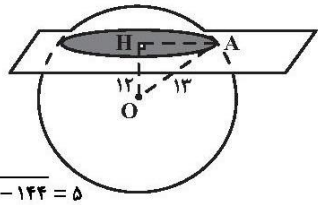
درنتیجه طول قطر کوچک ۲ است.

(هندسه تحلیلی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۶)

---

8 – گزینهٔ «۱» *(مهدی براتی)*

مطابق شکل، سطح مقطع ایجاد شده یک دایره به شعاع ۳ است. شعاع این دایره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\overset{\Delta}{OHA} : OA^۲ = OH^۲ + HA^۲$$

$$\Rightarrow ۱۳^۲ = ۱۲^۲ + r^۲ \Rightarrow r = \sqrt{۱۶۹ - ۱۴۴} = ۵$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با:

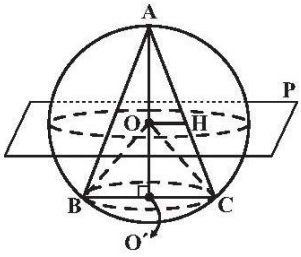
$$S = \pi r^۲ = ۲۵\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۴ و ۱۲۵)

---

9 – گزینهٔ «۱» *(نیما کریوریان)*

سطح مقطع حاصل نوار حلقه ای به شعاع درونی OH و شعاع بیرونی OH'، به‌صورت شکل زیر است:



$$AO' = \frac{۲}{۳} \times ۲R \Rightarrow AO' = \frac{۴R}{۳}$$

$$OO' = AO' - AO = \frac{۴R}{۳} - R = \frac{R}{۳}$$

$$OC^۲ = OO'^۲ + O'C^۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{R^۲}{۹} + O'C^۲$$

$$\Rightarrow O'C^۲ = \frac{۸R^۲}{۹} \Rightarrow O'C = \frac{\sqrt{۸}R}{۳}$$

در مثلث $AO'C$ طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OH}{O'C} = \frac{AO}{AO'} \Rightarrow \frac{OH}{\frac{\sqrt{۸}R}{۳}} = \frac{R}{\frac{۴R}{۳}} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۸}}{۴}R = \frac{\sqrt{۲}}{۲}R$$

در نتیجه مساحت شکل حاصل برابر با اختلاف مساحت دایره $S_۱$ به شعاع $R = ۳$ و مساحت دایره‌ای $S_۲$ به شعاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$ است با:

$$S_۱ = \pi R^۲ \quad , \quad S_۲ = \pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲}R)^۲ \Rightarrow S = S_۱ - S_۲$$

$$= \pi R^۲ - \frac{\pi R^۲}{۲} = \frac{\pi R^۲}{۲} \xrightarrow{R=۳} \frac{۹\pi}{۲} = ۴/۵\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۴ و ۱۲۵)

---

10 – گزینهٔ «۳» *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

اگر جسم را به اندازهٔ ۱۸۰° دوران دهیم نصف یک نیم‌کره به شعاع ۴ تولید می‌شود که یک کره کامل به شعاع ۲ از داخلش بیرون آورده‌ایم پس:

$$V = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳} \times \pi \times ۴^۳) - \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳} \times \pi \times ۲^۳)$$

$$V = \frac{۶۴\pi}{۳} - \frac{۱۶\pi}{۳} = \frac{۴۸\pi}{۳} = ۱۶\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵ و ۱۳۲)

---

11 – گزینهٔ «۳» *(عرفان وفائی)*

شکل حاصل از دوران مستطیل بزرگتر، استوانه‌ای به شعاع قاعده $۲ + ۴ = ۶$ و ارتفاع ۲ است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ از آن جدا شده است. پس حجم آن برابر است با:

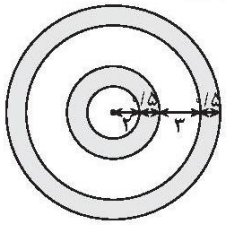
$$۲\pi((۴+۲)^۲ - ۲^۲) = ۶۴\pi$$

به همین ترتیب حجم شکل حاصل از دوران مستطیل کوچکتر برابر است با:

$$۱ \times \pi((۳ + \frac{۱}{۲} + ۲)^۲ - (۲ + \frac{۱}{۲})^۲) = ۲۴\pi$$

$$\text{حجم مورد نظر} = ۶۴\pi - ۲۴\pi = ۴۰\pi$$

سطح مقطع شکل حاصل از دوران حد فاصل بین A' تا D'، به‌صورت زیر است:

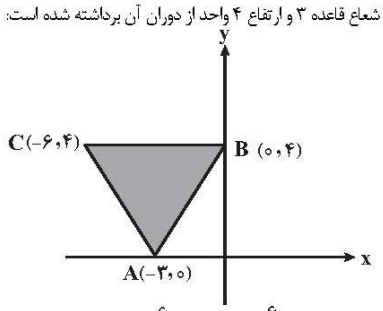


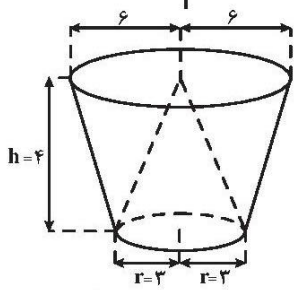
(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵ و ۱۳۲)

www.mapedu.ir

12 – گزینهٔ «۲» *(سید بوار نظری)*

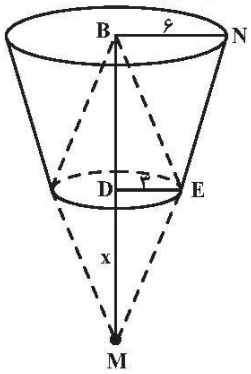
ابتدا مثلث ABC را در دستگاه مختصات رسم کرده و آن را حول محور y دوران می‌دهیم؛ همانطور که در شکل هم مشخص است، شکل حاصل از دوران، مخروط ناقص است که یک مخروط قائم به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ واحد از دوران آن برداشته شده است:





$$V_{\text{مخروط درونی}} = \frac{۱}{۳}(\pi r^۲)h = \frac{۱}{۳}\times(۹\pi)\times ۴ = ۱۲\pi$$

برای محاسبهٔ حجم مخروط ناقص، مطابق شکل زیر ابتدا باید در مثلث ABC با استفاده از قضیهٔ تالس مقدار x را محاسبه کنیم:



$$\overset{\Delta}{MBN}: \frac{MD}{MB} = \frac{DE}{BN} \Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow x = ۴$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{۱}{۳}\pi(BN)^۲(MB)$$

$$-\frac{۱}{۳}\pi(DE)^۲(MD)$$

$$\Rightarrow V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{۱}{۳}\pi(۶^۲)(۸) - \frac{۱}{۳}\pi(۳^۲)(۴) = ۸۴\pi$$

$$V_{\text{دوران}} = V_{\text{مخروط ناقص}} - V_{\text{مخروط درونی}} = ۸۴\pi - ۱۲\pi = ۷۲\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵ و ۱۳۲)

---

13 – گزینهٔ «۲» *(ممبر علیزاده)*

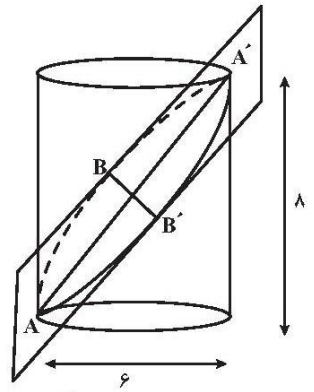
مطابق شکل داریم:

$$AA' = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ = ۲a \Rightarrow a = ۵$$

$$BB' = ۶ \Rightarrow ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$



(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۲)

---

14 – گزینهٔ «۱» *(پویان طهرانیان)*

نقطهٔ O مرکز بیضی، وسط پاره‌خط AA' است پس داریم: $O = (-۲,-۱)$

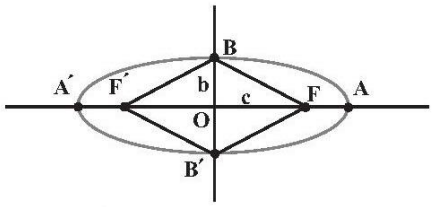
از طرفی داریم:

نصف طول قطر بزرگ: $a = OA = \sqrt{(۲-(-۲))^۲ + (-۱-(-۱))^۲} = ۴$

نصف فاصلهٔ کانونی: $c = OF = \sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (-۱-(-۱))^۲} = ۳$

می‌دانیم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b = \sqrt{۷}$

چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی است چون قطرها عمود منصف یکدیگرند، پس خواهیم داشت:



$$S = \frac{۱}{۲}BB' \times FF' = \frac{۱}{۲} \times ۲b \times ۲c$$

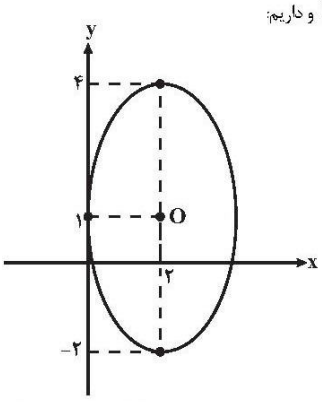
$$\Rightarrow S = ۲bc = ۲ \times \sqrt{۷} \times ۳ = ۶\sqrt{۷}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

---

15 – گزینهٔ «۲» *(سروش موئینی)*

مرکز این بیضی در وسط قطر بزرگ یعنی $O(۲,۱)$ قرار دارد با توجه به شکل روبه‌رو $a = ۳$ و $b = ۲$ و داریم:



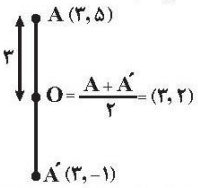
$$e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - (\frac{۲}{۳})^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

www.mapedu.ir

16 – گزینهٔ «۳» *(سیار راوطلب)*

طول نقاط دو سر قطر بزرگ بیضی با هم برابرند. یعنی نوع بیضی قائم است.



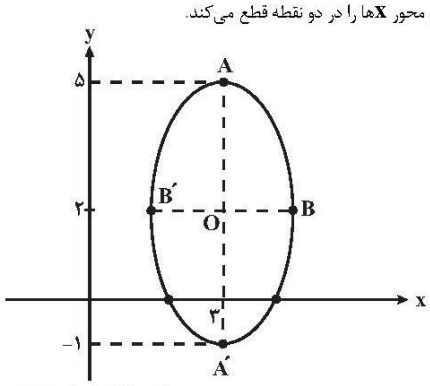
پس با توجه به شکل داریم:

$$OA = |۵-۲| = ۳ \Rightarrow a = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{فرض سؤال}} e = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{a=۳} c = \frac{۳}{۲}$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow b^۲ = ۹ - \frac{۹}{۴} = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow b = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

با اطلاعات به‌دست آمده، شکل بیضی را رسم می‌کنیم: توجه داشته باشید که مقدار **b** (با فرض $\sqrt{۳} \cong ۱/۷$) تقریباً ۲/۵۵ است. مطابق شکل این بیضی با محور **y**ها تلاقی نداشته ولی محور **x**ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

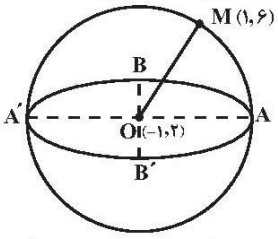


(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

---

17 – گزینهٔ «۴» *(حمید علیزاده)*

با توجه به شکل مقابل **OM** برابر **OA** است پس:



$$OM = OA \Rightarrow a = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + (۶-۲)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$AA' = ۴BB' \Rightarrow a = ۴b \Rightarrow ۲\sqrt{۵} = ۴b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۵})^۲ = (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۰ - \frac{۵}{۴} = c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = \frac{۷۵}{۴} \Rightarrow c = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

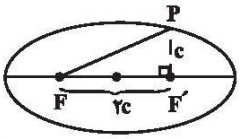
فاصلهٔ کانونی $FF' = ۲c = ۲(\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}) = ۵\sqrt{۳}$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

---

18 – گزینهٔ «۲» *(مهتابیش نیکنام)*

در مثلث قائم‌الزاویه PFF' داریم:



$$FF'^۲ + PF'^۲ = PF^۲ \Rightarrow ۴c^۲ + c^۲ = PF^۲ \Rightarrow PF = c\sqrt{۵}$$

$$PF + PF' = ۲a \Rightarrow c\sqrt{۵} + c = ۲a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

$$b^۲ + c^۲ = a^۲ \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}$$

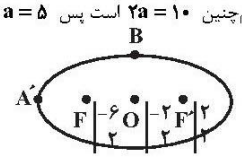
$$\Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۲b}{۲a} = \sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

---

19 – گزینهٔ «۴» *(سروش موئینی)*

دو کانون بیضی $F(-۶,۲)$ و $F'(۲,۲)$ هستند پس مرکز بیضی $O(-۲,۲)$ و $OF = c = ۴$ است. هم‌چنین $۲a = ۱۰$ است پس $a = ۵$ و داریم:



$$b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = ۳$$

$$x_{min} = x_{A'} = x_O - a = -۲ - ۵ = -۷$$

$$y_{max} = y_B = y_O + b = ۲ + ۳ = ۵$$

و اختلاف آن‌ها برابر ۱۲ است.

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

---

20 – گزینهٔ «۱» *(عرفان وفائی)*

$$AA' = ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

$$BB' = ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

از طرفی می‌دانید $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین:

$$c^۲ = ۱۶ - ۹ \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

$$MF + MF' = ۲a = ۸$$

در مثلث MFF'، **MO** میانه است و چون $MO = OF = c$، پس $\hat{M} = ۹۰^\circ$ است. بنابراین:

$$MF'^۲ + MF^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF'^۲ + MF^۲ = (۲c)^۲ = ۴c^۲ = ۲۸$$

حال داریم:

$$(MF + MF')^۲ = MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF.MF'$$

$$\Rightarrow ۲MF.MF' = (MF + MF')^۲ - (MF^۲ + MF'^۲)$$

$$\Rightarrow ۲MF.MF' = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶$$

$$\Rightarrow MF.MF' = ۱۸$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

---

21 – گزینهٔ «۲» *(اکبر کلاه‌مکی)*

نقاط $(۲,۳)$ و $(۴,۱)$ دو سر یکی از قطرهای دایره هستند. پس:

مرکز دایره: $W(\frac{۴+۲}{۲}, \frac{۱+۳}{۲}) \Rightarrow W(۳,۲)$

طول قطر دایره $= \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow$ طول شعاع دایره $= \sqrt{۲}$

www.mapedu.ir

معادلهٔ دایره $(x-3)^2+(y-2)^2=2$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-6x-4y+11=0 \Rightarrow c=11$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

---

22 – گزینهٔ «۳» (سهیل ساسانی)

$$x^2+y^2+6x+8y=0$$

مرکز $(-3,-4)$, $R=5$

$$x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

$$O'(2,-3), R'=1$$

$$OO'=\sqrt{26}, R+R'=6, R-R'=4$$

$R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ متقاطع

(هندسه) (ریاضی۳، صفحهٔ ۱۴۱)

---

23 – گزینهٔ «۳» (میلاد منصوری)

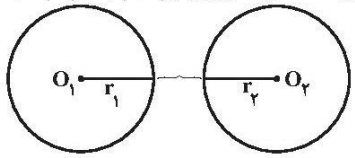
ابتدا این دو دایره را به‌صورت استاندارد بنویسیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y-11=0 \\ x^2+y^2-12x-10y+25=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(y+3)^2-36=0 \\ (x-6)^2+(y-5)^2-36=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(y+3)^2=36 \\ \Rightarrow O_1 \text{ مرکز } =(-4,-3), r_1=6 \\ (x-6)^2+(y-5)^2=36 \\ \Rightarrow O_2 \text{ مرکز } =(6,5), r_2=6 \end{cases}$$

همانطور که می‌بینید فاصلهٔ مورد نظر برابر با $|O_1O_2|-(r_1+r_2)$ است. پس:



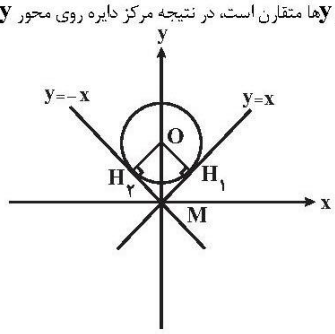
$$\sqrt{10^2+8^2}-(6+6)=2\sqrt{41}-12$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

---

24 – گزینهٔ «۲» (نیما کریوریان)

مطابق شکل زیر، با توجه به تقارن شکل دایره، نیمسازهای ناحیهٔ اول و دوم مطابق شکل زیر نسبت به محور yها متقارن است، در نتیجه مرکز دایره روی محور yها قرار می‌گیرد:



همانطور که در شکل مشخص است چهارضلعی OH_1MH_2 مربعی به ضلع $4\sqrt{2}$ است، در نتیجه اندازهٔ OM که قطر مربع است، برابر است با:

$$OM=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8$$

و حال فاصله مرکز دایره به مختصات $O(0,8)$ تا نقطهٔ $A(3,4)$ برابر است با:

$$OA=\sqrt{(3-0)^2+(4-8)^2}=5$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

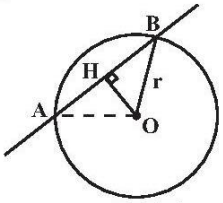
---

25 – گزینهٔ «۱» (مهدی براتی)

معادلهٔ استاندارد دایره به‌صورت $(x+3)^2+(y-2)^2=-a+13$ است. ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را به‌دست می‌آوریم:

خط: $3x-4y+7=0$ مرکز دایره: $O(-3,2)$

$$OH=\frac{|3\times(-3)-4\times2+7|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$



از طرف دیگر طول وتر $AB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ و چون OH عمود منصف AB است $BH=\sqrt{5}$ که با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{OBH}$ شعاع دایره به‌دست می‌آید:

$$r^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow r=\sqrt{4+5}=3$$

همچنین شعاع با توجه به معادلهٔ دایره برابر است با:

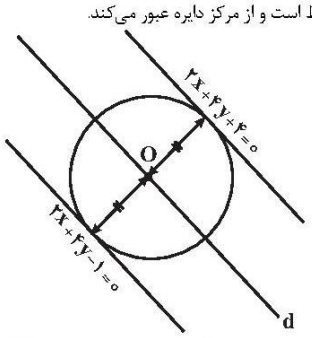
$$r=\sqrt{9+4-a} \Rightarrow \sqrt{13-a}=3 \Rightarrow a=4$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

---

26 – گزینهٔ «۲» (ممبر علیزاده)

دو خط $x+2y+2=0$ و $2x+4y-1=0$ موازی یکدیگرند پس خطی به معادلهٔ زیر وسط این دو خط است و از مرکز دایره عبور می‌کند.



$$d: 2x+4y+\frac{-1+4}{2}=0 \Rightarrow 2x+4y+\frac{3}{2}=0$$

یکی از قطرهای دایره خط $y=-x$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2x+4y+\frac{3}{2}=0 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{-3}{4}$$

$\Rightarrow$ مرکز دایره $O(\frac{3}{4},\frac{-3}{4}) \Rightarrow \alpha-\beta=1/5$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

---

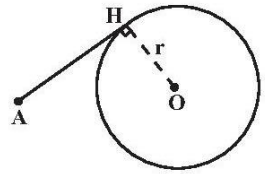
27 – گزینهٔ «۳» (مهدی براتی)

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(4,1)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-1=m(x-4) \Rightarrow y-mx+4m-1=0$$

از طرف دیگر چون خط بر دایره مماس است فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره است.

www.mapedu.ir



با توجه به معادلهٔ دایره، مختصات مرکز و شعاع دایره برابر است با:

$$C: x^2+y^2-2x-4y=0 \Rightarrow O(1,2) \quad r=\sqrt{5}$$

$$OH=\frac{|2-m+4m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \Rightarrow |3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$$

$$\Rightarrow 9m^2+6m+1=5m^2+5 \Rightarrow 4m^2+6m-4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-2 \Rightarrow L: 2x+y-9=0 \\ m=\frac{1}{2} \Rightarrow L: x-2y-2=0 \end{cases}$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۲)

---

28 – گزینهٔ «۴» *(سهیل ساسانی)*

با توجه به معادلهٔ گستردهٔ دایره داریم: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\left.\begin{array}{ll} (2,1) \Rightarrow 2a+b+c=-5 & (I) \\ (2,-3) \Rightarrow 2a-3b+c=-13 & \end{array}\right\} \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow b=2$$

$$(-1,1) \Rightarrow -a+b+c=-2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} 2a+c=-7 \\ -a+c=-4 \end{cases} \Rightarrow a=-1, c=-5$$

معادلهٔ دایره $\Rightarrow x^2+y^2-x+2y-5=0$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{1+4-4(-5)}=\frac{5}{2}$$

مربع مفروض به شکل مقابل است:

$$S=\frac{\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}}{2}=\frac{25}{8}$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۲)

---

29 – گزینهٔ «۱» *(سیار راوطلب)*

ابتدا صورت سؤال را به‌صورت ریاضی می‌نویسیم، سپس آن را ساده می‌کنیم:

فاصلهٔ نقطهٔ M تا A = ۲ × (فاصلهٔ نقطهٔ M تا B)

$$\Rightarrow AM=2BM \ *$$

$$M(x,y), A(6,0) \Rightarrow AM=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-12x+36+y^2}$$

$$M(x,y), B(0,3) \Rightarrow BM=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2-6y+9}$$

$$\xrightarrow{*} \sqrt{x^2-12x+36+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2-6y+9}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-12x+36+y^2=4(x^2+y^2-6y+9)$$

$$\longrightarrow 3x^2+3y^2+12x-24y=0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2+y^2+4x-8y=0$$

پس مسیر حرکت M یک دایره است.

$$\text{مرکز} \rightarrow O\left(\frac{4}{-2},\frac{-8}{-2}\right)=(-2,4)$$

$$\text{شعاع} \rightarrow R=\frac{\sqrt{4^2+(-8)^2-0}}{2}=\frac{\sqrt{80}}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$$

(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۲)

---

30 – گزینهٔ «۲» *(سامان سلامیان)*

$$C: \begin{cases} (x+2)^2+(y-3)^2=4 \\ O(-2,3) \\ R=2 \end{cases} \qquad C': \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=49 \\ O'(1,-1) \\ R'=7 \end{cases}$$

می‌بینیم:

$$\left.\begin{array}{l} OO'=\sqrt{(-2-1)^2+(3-(-1))^2} \\ =\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \\ |R-R'|=|2-7|=5 \end{array}\right\} \Rightarrow OO'=|R-R'|$$

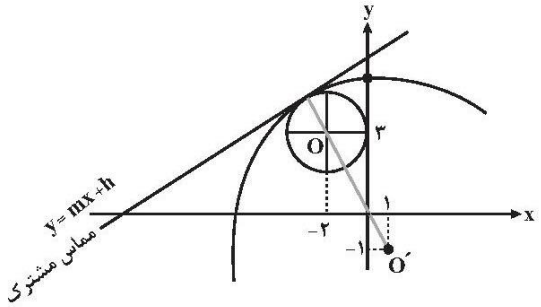
پس نتیجه می‌گیریم دو دایره از داخل بر هم مماسند. (مماس درون)

خط $y=mx+h$ بر هر دو دایره مماس است و شیب آن قرینه و معکوس شیب خط واصل دو نقطه O و O′ است.

$$m_{OO'}=\frac{y_O-y_{O'}}{x_O-x_{O'}}=\frac{3-(-1)}{-2-1}=\frac{4}{-3}=\frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

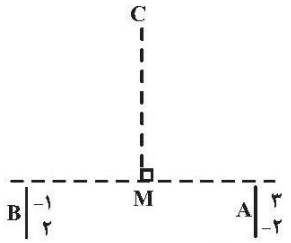
توجه: طبق شکل می‌بینیم که شیب مماس مشترک باید عددی مثبت باشد.



(هندسه) (ریاضی۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۲)

31 – گزینهٔ «۳» *(احسان غنی‌زاده)*

پاره‌خط CM عمود منصف پاره‌خط AB است.



می‌دانیم M وسط پاره‌خط AB است پس داریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow M\Big|^{1}_{0}$$

$$\text{شیب خط } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-2)}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$$

از طرفی شیب پاره‌خط CM عکس و قرینهٔ شیب AB یعنی ۱ است.

$$m_{CM} = 1 \Rightarrow y = x + b \xrightarrow{M\Big|^{1}_{0}} 0 = 1\times 1 + b \Rightarrow b = -1$$

اگر $x = 4$ را در $y - 2x + 3 = 0$ جایگذاری کنیم آنگاه داریم:

$$y - 2\times 4 + 3 = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = +5$$

حالا فاصلهٔ نقطهٔ $(4,5)$ از خط $y - x + 1 = 0$ را به‌دست می‌آوریم:

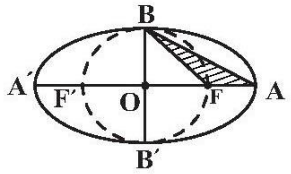
$$d = \frac{|5-4+1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۱۳۸)

---

32 – گزینهٔ «۱» *(امیرهوشنگ انصاری)*



مطابق شکل اگر دایره به قطر FF' از رئوس B و B' عبور کند $OF = c$ و $OB = c$ شعاع دایره خواهند بود یعنی $b = c$ در نتیجه:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b$$

و همچنین $a = \sqrt{2}c$ است.

$$\text{مساحت مثلث } BAF: \frac{1}{2}\times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2}\times OB \times AF = \frac{1}{2}\times b \times (a-c)$$

$$= \frac{1}{2}\times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

---

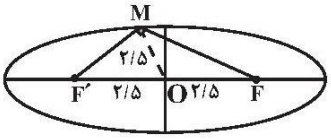
33 – گزینهٔ «۲» *(سید بوار نظری)*

طول قطر بزرگ بیضی برابر ۷ است پس:

$$2a = 7 \Rightarrow a = 3/5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{c}{3/5} = \frac{5}{7} \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و بالعکس و از طرفی می‌دانیم که فاصله نقطهٔ M از مرکز بیضی برابر $\frac{5}{2}$ است. لذا مطابق شکل می‌توان گفت که چون در مثلث MFF'، پاره‌خط OM میانه وارد بر ضلع FF' بوده و اندازهٔ آن هم نصف FF' است. لذا مثلث MFF' در رأس M قائمه بوده و طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MFF' داریم:



$$\xrightarrow[MF'=n]{MF=m} m^2 + n^2 = 25$$

می‌دانیم $MF + MF' = 2a = 7$ حال براساس اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ داریم:

$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn \Rightarrow (7)^2 = 25 + 2mn \Rightarrow mn = 12$$

از طرفی می‌دانیم اگر $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند برای پیدا کردن α و β باید معادله $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنیم. لذا برای یافت m و n باید معادله $x^2 - 7x + 12 = 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m = MF = 4 \\ x_2 = n = MF' = 3 \end{cases}$$

لذا فاصله نقطهٔ M از نزدیکترین کانون بیضی برابر $MF' = 3$ است.

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

---

34 – گزینهٔ «۱» *(عرفان رفائی)*

ناحیهٔ هاشور خورده پس از دوران، تبدیل به فضای بین دو مخروط قائم هم رأس می‌گردد که ارتفاع هر دو $h = 2$ است. برای محاسبهٔ شعاع قاعده، باید خط $y = 1$ را با دو خط مورب تلاقی دهیم:

$$d_1 \text{ معادلهٔ خط}: y + x = 3 \xrightarrow{y=1} x = 2 \text{ شعاع قاعده مخروط بیرونی}$$

$$d_2 \text{ معادلهٔ خط}: \frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 1 \xrightarrow{y=1} x = \frac{4}{3} \text{ شعاع قاعدهٔ مخروط درونی}$$

حجم مخروط درونی − حجم مخروط بیرونی = حجم فضای ایجاد شده

$$= \frac{\pi}{3}(2)^2(2) - \frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2(2) = \frac{2\pi}{3}\left(4 - \frac{16}{9}\right) = \frac{2\pi}{3}\times\frac{20}{9} = \frac{40\pi}{27}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵ و ۱۳۲)

---

35 – گزینهٔ «۳» *(احسان غنی‌زاده)*

می‌دانیم معادلهٔ گستردهٔ دایره به‌صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است پس به کمک نقاط داده شده و جایگذاری هر کدام در معادلهٔ فوق داریم:

$$A(1,2) \xrightarrow[y=2]{x=1} 1^2 + 2^2 + a\times 1 + 2\times b + c = 0$$

$$\Rightarrow a + 2b + c = -5$$

$$B(1,-6)\xrightarrow[y=-6]{x=1}1^2+(-6)^2+a\times 1+b\times(-6)+c=0$$

$$\Rightarrow a-6b+c=-37$$

$$C(3,2)\xrightarrow[y=-2]{x=-3}(3)^2\quad(2)^2\quad a\ (3)\quad b\ (2)\quad c\quad 0$$

$$\Rightarrow -3a-2b+c=-13$$

حال ما یک دستگاه ۳ معادلهٔ ۳ مجهولی داریم، برای حل بهتر است یکی از مجهول‌ها را برحسب دیگری پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a+2b+c=-5\Rightarrow c=-a-2b-5 \\ a-6b+c=-37\Rightarrow a-6b-a-2b-5=-37 \\ -3a-2b+c=-13\Rightarrow -3a-2b-a-2b-5=-13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -8b=-32\Rightarrow b=4 \\ -4a-4b=-8\Rightarrow -4a-16=-8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-2\Rightarrow c=-11$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x+4y=11$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

---

36 – گزینهٔ «۱» *(نیما کریوریان)*

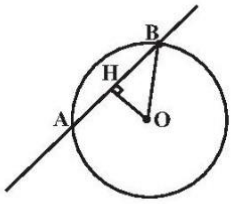
در ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم تا مختصات مرکز و شعاع دایره مشخص شود:

$$x^2+y^2-4x+8y+15=0\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16=5$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=5$$

$$\Rightarrow\begin{cases} O(2,-4) & \text{مرکز} \\ r=\sqrt{5} & \text{شعاع} \end{cases}$$

$$4y+3x+5=0$$



حال فاصلهٔ O را تا خط $4y+3x+5=0$ پیدا می‌کنیم:

$$O(2,-4)\xrightarrow{3x+4y+5=0}OH=\frac{|3(2)+4(-4)+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$$

$$\xrightarrow[\overset{\Delta}{OHB}]{\text{فیثاغورس}}r^2=OH^2+BH^2\Rightarrow(\sqrt{5})^2=1^2+BH^2$$

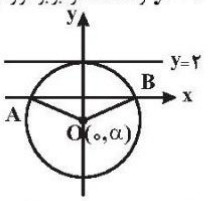
$$BH^2=4\Rightarrow BH=2$$

$$\Rightarrow AB=2BH=4$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

37 – گزینهٔ «۲» *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

با توجه به شکل فرضی زیر، مرکز دایره روی محور yها است. آن را $(0,\alpha)$ فرض می‌کنیم و فاصلهٔ آن تا خط $y=2$ و نقطهٔ B را برابر قرار می‌دهیم:



$$|\alpha-2|=\sqrt{4+\alpha^2}\Rightarrow\alpha^2-4\alpha+4=4+\alpha^2\Rightarrow\alpha=0$$

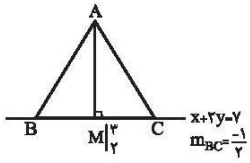
بنابراین شعاع دایره برابر $R=|\alpha-2|=2$ و مرکز آن $O(0,0)$ است.

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

www.mapedu.ir

38– گزینهٔ «۲» *(سراسری تجربی خارج از کشور- ۱۴۰۰)*

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید.



شیب خط $x+۲y=۷$ برابر با $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، AM هم میانه و هم ارتفاع است، پس A روی خطی عمود بر BC واقع است، پس:

$$AM\perp BC\Rightarrow m_{AM}.m_{BC}=-۱\Rightarrow m_{AM}=۲$$

$$\Rightarrow AM: y-۲=۲(x-۳)\Rightarrow y=۲x-۴$$

از آنجاکه A روی خط به معادلهٔ $y=۲x-۴$ واقع است، مختصات آن را به صورت $A(x\,,\,۲x-۴)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$AM=۵\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^۲+((۲x-۴)-۲)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^۲+(۲x-۶)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^۲+۴(x-۳)^۲}=۵\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{۵(x-۳)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

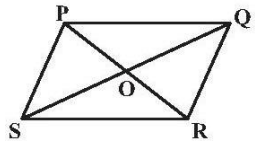
$$\Rightarrow\sqrt{۵}\,|x-۳|=۵\sqrt{۵}\Rightarrow|x-۳|=۵$$

$$\Rightarrow x-۳=\pm۵\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۵\Rightarrow x=۸\\x-۳=-۵\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

39– گزینهٔ «۴» *(سعید تن‌آرا)*

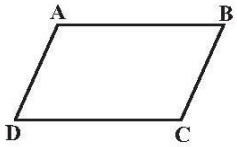
با توجه به اینکه قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند لذا می‌توان نوشت:



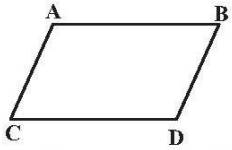
$$O=\frac{۱}{۲}(P+R)=\frac{۱}{۲}(Q+S)$$

در نتیجه $P+R=Q+S$

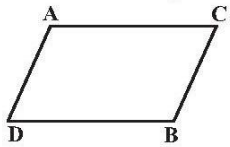
حال برای متوازی‌الاضلاع داده شده سه حالت وجود دارد:



$$D=A+C-B$$
$$=(۱,۲)+(۴,۱)-(۲,۶)=(۳,-۳)$$
$$\Rightarrow p+q=۰$$



$$D=B+C-A$$
$$=(۲,۶)+(۴,۱)-(۱,۲)=(۵,۵)$$
$$\Rightarrow p+q=۱۰$$

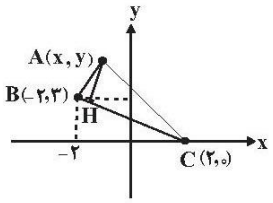


$$D=A+B-C$$
$$=(۱,۲)+(۲,۶)-(۴,۱)=(-۱,۷)$$
$$\Rightarrow p+q=۶$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

40– گزینهٔ «۲» *(حمید علیزاده)*

چون نقطه $A(x\,,\,y)$ روی خط $y=-۲x+۳$ واقع است پس مختصات آن به صورت $A(x,-۲x+۳)$ می‌باشد. حال معادلهٔ ضلع BC را نوشته و اندازهٔ ارتفاع AH را محاسبه می‌کنیم. شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید:



$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۰-۳}{۲-(-۲)}=-\frac{۳}{۴}$$

$$C(۲,۰)\rightarrow y-۰=\frac{-۳}{۴}(x-۲)\rightarrow$$

$$\boxed{۳x+۴y-۶=۰}\ (\text{معادلهٔ ضلع } BC)$$

$$\left.\begin{array}{l}A(x,-۲x+۳)\\۳x+۴y-۶=۰\end{array}\right\}\rightarrow$$

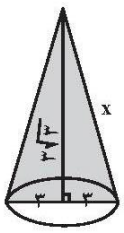
$$AH=\frac{|۳x+۴(-۲x+۳)-۶|}{\sqrt{(۳)^۲+(۴)^۲}}\Rightarrow\frac{|-۵x+۶|}{۵}=۲/۲$$

$$\rightarrow|۵x-۶|=۱۱\rightarrow۵x-۶=\pm۱۱\rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱۷}{۵}\\x=-۱\end{cases}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

41– گزینهٔ «۳» *(سعید تن‌آرا)*

اگر صفحه‌ای شامل رأس و مرکز قاعده یک مخروط قائم، آن‌را قطع کند، مقطع حاصل یک مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. طول ساق‌های این مثلث از رابطه فیثاغورس قابل محاسبه است:



$$x^۲=(۳\sqrt{۳})^۲+۳^۲=۲۷+۹=۳۶\Rightarrow x=۶$$

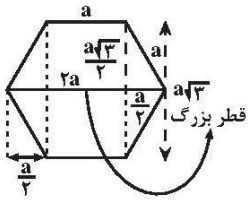
بنابراین مقطع حاصل مثلث متساوی‌الاضلاعی به محیط **۱۸** است.

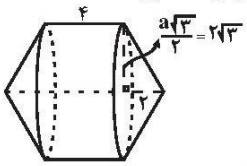
(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۷)

www.mapedu.ir

42- گزینهٔ «۳» (مهدی براتی)

نکته: در ۶ ضلعی منتظم به ضلع a قطر بزرگ برابر است با $2a$ و قطر کوچک برابر است با $a\sqrt{3}$. اگر ۶ضلعی منتظم به ضلع ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم شکل حاصل به‌صورت زیر است. شکل حاصل از یک استوانه به شعاع قاعده $2\sqrt{3}$ و ارتفاع ۴ و دو مخروط به شعاع قاعده $2\sqrt{3}$ و ارتفاع ۲ تشکیل شده است.





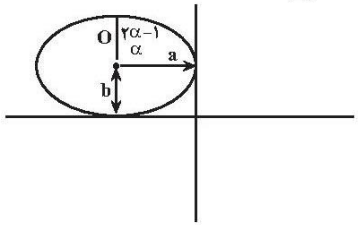
$$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} + 2V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{3})^2\times 4 + 2(\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2\times 2)$$

$$= 48\pi + 16\pi = 64\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵ و ۱۳۲)

43- گزینهٔ «۲» (بهرام ملاج)

اگر مرکز بیضی روی خط گفته شده باشد، می‌توان مختصات آن را به‌صورت زیر در نظر گرفت: $O\left|\begin{matrix}2\alpha-1\\ \alpha\end{matrix}\right.$ کاملاً واضح است که اگر بیضی افقی مطابق شکل در ناحیهٔ دوم بر محورها مماس باشد، داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1-2\alpha \\ b = \alpha \end{cases}$$

حال داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = (1-2\alpha)^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + 1}$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+1}}{1-2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3\alpha^2-4\alpha+1}{4\alpha^2-4\alpha+1} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 12\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 12\alpha^2 - 12\alpha + 3$$

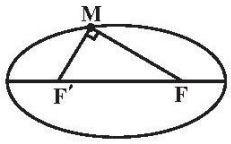
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$$

مستطیلی که از برخورد خطوط مماس بر بیضی در رئوس آن تشکیل می‌شود، مستطیلی به ابعاد $2a$ و $2b$ است. پس داریم: $S = 4ab = \frac{1}{2}$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۳۲)

44- گزینهٔ «۳» (محمدسیار پیشوایی)

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از کانون‌ها برابر $MF + MF' = 2a$ است، لذا:



$$(MF+MF')^2 = MF^2 + MF'^2 + 2MF\times MF'$$

$$\Rightarrow (5\sqrt{3})^2 = MF^2 + MF'^2 + 2(13)$$

$$MF^2 + MF'^2 = 49$$

حال در رابطهٔ مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{MFF'}$ داریم:

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2$$

$$FF'^2 = 49 \Rightarrow FF' = 7$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

45- گزینهٔ «۳» (وحید ون‌آبادی)

اگر M نقطه ای درون بیضی باشد ، آنگاه:

$$MF + MF' < 2a \to \sqrt{3^2+(-4)^2} + \sqrt{(K-2)^2+(-1)^2} < 10$$

$$\Rightarrow 5 + \sqrt{(K-2)^2+1} < 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(K-2)^2+1} < 5 \to (K-2)^2 + 1 < 25 \to (K-2)^2 < 24$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{6} < K-2 < 2\sqrt{6} \to \underbrace{2-2\sqrt{6}}_{\simeq -2/9} < K < \underbrace{2+2\sqrt{6}}_{\simeq 6/9}$$

$$\xrightarrow{K\in\mathbb{Z}} = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

46- گزینهٔ «۱» (وحید ون‌آبادی)

معادله دایره در حالت گسترده به‌صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. این سه نقطه را در معادله دایره صدق می‌دهیم:

$$(0,0) \to c = 0$$

$$(-2,2) \to 4 + 4 - 2a + 2b = 0 \to -2a + 2b = -8$$

$$(2,-4) \to 4 + 16 + 2a - 4b = 0 \to \underline{2a - 4b = -20} \quad \oplus$$

$$-2b = -28$$

$$b = 14, a = 18$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{18^2+14^2} = \frac{1}{2}\sqrt{520} = \sqrt{130} \Rightarrow R^2 = 130$$

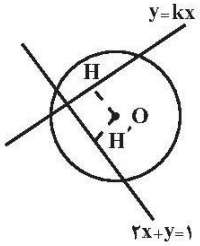
(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷ و ۱۴۲)

47– گزینهٔ «۲» *(سعید پناهی)*

با توجه به اینکه وترها مساویند لذا فاصله مرکز دایره از دو خط $y = kx$ و $2x + y = 1$ یکسان است.

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow O = (\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (1, 0)$$

$$|OH| = |OH'| \Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|2-1|}{\sqrt{5}}$$



$$\Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5k^2 = 1 + k^2 \Rightarrow 4k^2 = 1$$

$$\Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹ و ۱۴۲)

48– گزینهٔ «۲» *(سعید تن‌آرا)*

معادلهٔ استاندارد دو دایره به‌صورت $(x-a)^2 + (y-5)^2 = 2^2$ و $(x+1)^2 + (y-2)^2 = a^2$ می‌باشد. چون دو دایره مماس خارجی‌اند لذا تساوی $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$ برقرار می‌باشد. از طرفی:

$$O_1(a,5), O_2(-1,2) \Rightarrow \overline{O_1O_2} = \sqrt{(a+1)^2 + 9}$$

$$R_1 = 2, R_2 = |a| \Rightarrow R_1 + R_2 = 2 + |a|$$

در نتیجه:

$$\sqrt{(a+1)^2 + 9} = |a| + 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (a+1)^2 + 9 = (|a| + 2)^2$$

$$\Longrightarrow a^2 + 2a + 1 + 9 = a^2 + 4|a| + 4$$

$$\begin{cases} a > 0 \rightarrow a = 3 \\ a < 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره عبارتست از:

$$R_1 + R_2 = 2 + |a| \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

49– گزینهٔ «۳» *(بهرام ملاح)*

برای به‌دست آوردن معادلهٔ وتر مشترک، ابتدا معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم:

$$\text{دایره ۱}: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12$$

$$\text{دایره ۲}: (x-5)^2 + (y-8)^2 = 49 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 - 10x - 16y = -40}$$

$$\xrightarrow{-} 16x + 12y = 52 \Rightarrow 4x + 3y = 13$$

حال داریم:

$$OH = \frac{|-13|}{\sqrt{16+9}} = \frac{13}{5} = 2/6$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

50– گزینهٔ «۳» *(سهیل ساسانی)*

نقطه مجهول $M(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به صورت مسئله داریم:

$$|MA| = \frac{1}{2}|MB| \Rightarrow 4|MA|^2 = |MB|^2$$

$$\Rightarrow 4((x+3)^2 + (y+1)^2) = (x+6)^2 + (y+5)^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10) = x^2 + y^2 + 12x + 10y + 61$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 12x - 2y = 21$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - \frac{2}{3}y = 7$$

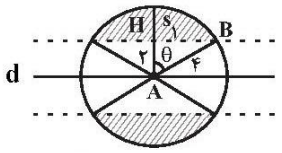
$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = 7 + 2^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow R = \frac{10}{3}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

51– گزینهٔ «۳» *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A روی خط d کمتر از ۴ واحد فاصله دارند، نقاط داخل دایره به مرکز A و شعاع ۴ واحد می‌باشند. نقاطی که از خط d به فاصلهٔ بیشتر از ۲ واحد هستند در خارج از فاصله دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۲واحد از آن می‌باشند. مساحت خواسته شده ، مساحت قسمت هاشورخورده زیر است پس:



$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

مساحت قسمت هاشورخورده ۴ برابر مساحت s_1 است پس:

$$HB = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

$$s_1 = \frac{1}{6}(\pi \times 4^2) - 2 \times \frac{(2\sqrt{3})}{2} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

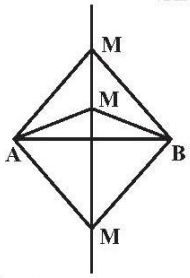
$$S_{\text{خواسته‌شده}} = 4(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}) = 8(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

52– گزینهٔ «۴» (مهسن اسماعیل‌پور)

$$\frac{AM-4MB}{2AM+3MB}=-\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow 5AM-20MB=-6AM-9MB$$
$$\Rightarrow 11AM=11MB\rightarrow AM=MB$$

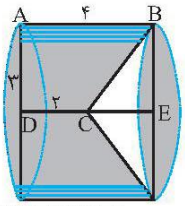
A و **B** ثابت هستند. می‌دانیم هر نقطه که از دو سر پاره‌خط **AB** به یک فاصله باشد روی عمود منصف **AB** واقع است.



(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

53– گزینهٔ «۴» (علی ساوجی)

جسم حاصل از دوران، یک استوانه است که مخروطی را از آن خارج کرده‌اند:



$$CE=4-2=2$$

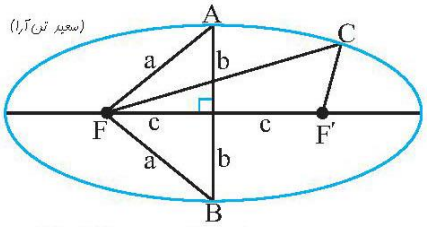
$$V=\underset{\text{استوانه}}{V}-\underset{\text{مخروط}}{V}=\pi(3)^2\times 4-\frac{1}{3}\pi(3)^2\times 2$$

$$=36\pi-6\pi=30\pi$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۷)

54– گزینهٔ «۱» (سعید تن‌آرا)

اگر $2a$، $2b$ و $2c$ به ترتیب قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی بیضی باشند آنگاه:



$AF=BF=a$ و $AB=2b$

در نتیجه محیط مثلث ABF برابر $P_1=2a+2b$ خواهد بود.

همچنین می‌دانیم $CF+CF'=2a$ در نتیجه محیط مثلث CFF' برابر $P_2=2a+2c$ می‌باشد. از برابری $P_1=P_2$ نتیجه می‌گیریم $b=c$.

در نتیجه از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ نتیجه $a=\sqrt{2}c$ حاصل می‌شود. لذا:

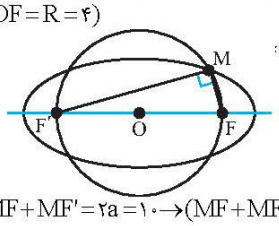
$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{2}c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

55– گزینهٔ «۳» (بهزاد مهرمی)

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی. از طرفی شعاع دایره برابر با نصف فاصله‌ی کانون‌هاست. $(OF=R=4)$

با توجه به خروج از مرکز بیضی داریم:



$$\left.\begin{array}{l} e=\frac{c}{a}=0/8 \\ c=4 \end{array}\right\}\Rightarrow a=5$$

از طرفی: $MF+MF'=2a=10\rightarrow(MF+MF')^2=10^2$

$$\rightarrow MF^2+2MF\times MF'+MF'^2=100$$

با توجه به اینکه نقطهٔ M روبروی قطر است، پس ۹۰ درجه است و MF بر MF' عمود است و مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $MF^2+MF'^2=FF'^2=8^2$

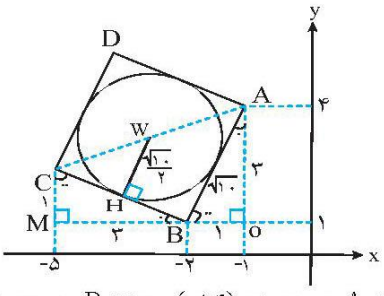
با توجه به دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم:

$$MF^2+2MF\times MF'+MF'^2=100\rightarrow 64+2MF\times MF'=100$$
$$\rightarrow MF\times MF'=18$$

مساحت مثلث MFF' برابر است با: $S=\frac{MF\times MF'}{2}=\frac{18}{2}=9$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۸ تا ۱۳۲)

56– گزینهٔ «۲» (سیدبهوار نظری)



می‌دانیم نقطهٔ A به مختصات $(-1,4)$ و نقطهٔ B به مختصات $(-2,1)$ است لذا طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AOB، $AB=\sqrt{10}$ است و چون $ABCD$ مربع است پس: $CB=\sqrt{10}$

از طرفی مطابق شکل مقابل مشخص است که دو مثلث قائم‌الزاویه AOB و CMB با هم، هم‌نهشت هستند پس در مثلث قائم‌الزاویه CMB، $CM=1$ و $MB=3$ است لذا می‌توان نتیجه گرفت که مختصات رأس C به صورت $C(-5,2)$ است در نتیجه مختصات مرکز دایره برابر است با:

$$\begin{cases} C(-5,2) \\ A(-1,4) \end{cases}\Rightarrow W\left(\frac{-5-1}{2},\frac{2+4}{2}\right)\Rightarrow W(-3,3)$$

از طرفی اندازهٔ شعاع دایره نیز برابر نصف اندازهٔ ضلع مربع است، پس:

$$WH=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

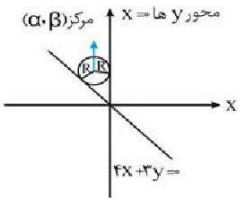
$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow(x-(-۳))^۲+(y-۳)^۲=(\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})^۲$$

فرم استاندارد: $(x+۳)^۲+(y-۳)^۲=\frac{۵}{۲}$

فرم گسترده: $۲x^۲+۲y^۲+۱۲x-۱۲y+۳۱=۰$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷ و ۱۴۲)

57– گزینهٔ «۱» *(بهزاد محرمی)*



با توجه به شکل، α و β هم‌علامت نیستند، $(\alpha,\beta)\to(\alpha<۰,\beta>۰)$

فاصله مرکز دایره از خط $۴x+۳y=۰$ و $x=۰$ برابر هم و برابر شعاع است.

$$R=\frac{|۴\alpha+۳\beta|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|\alpha|}{۱}\to|۴\alpha+۳\beta|=۵|\alpha|$$

چون α منفی و β مثبت است، بنابراین:

$$۴\alpha+۳\beta=۵\alpha\to\alpha=۳\beta\to\times$$

α و β هم‌علامت نیستند: $۴\alpha+۳\beta=-۵\alpha\to\beta=-۳\alpha\to\checkmark$

فاصلهٔ نقطه $(-۱,۴)$ از مرکز برابر شعاع است.

$$\sqrt{(\alpha+۱)^۲+(\beta-۴)^۲}=|\alpha|\to(\alpha+۱)^۲+(\beta-۴)^۲=\alpha^۲$$

$$\xrightarrow{\beta=-۳\alpha}\alpha^۲+۲\alpha+۱+۹\alpha^۲+۲۴\alpha+۱۶=\alpha^۲$$

$$\to\underset{(۹\alpha+۱۷)(\alpha+۱)}{۹\alpha^۲+۲۶\alpha+۱۷=۰}\to\begin{cases}\alpha=-۱\to R=|-۱|=۱\\ \alpha_۱=\frac{-۱۷}{۹}\to R=\left|\frac{-۱۷}{۹}\right|=\frac{۱۷}{۹}\end{cases}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

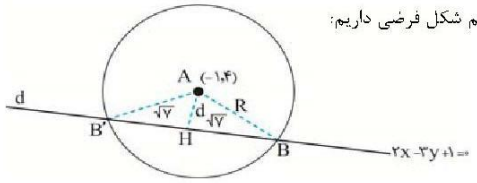
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶ و ۱۴۲)

58– گزینهٔ «۱» *(احسان غلی‌زاده)*

با توجه به فرم استاندارد دایره داریم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\xrightarrow[\beta=۴]{\alpha=-۱}(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=R^۲$$

با رسم شکل فرضی داریم:



بنا به شکل، باید d را بدست آوریم:

$$\text{فاصله مرکز A تا خط d}=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

بنابه قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{AHB}$ داریم:

$$R^۲=d^۲+BH^۲\Rightarrow R^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۱۳+۷\Rightarrow R^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰\xrightarrow{y=۲}(x+۱)^۲+(-۲)^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow(x+۱)^۲+۴=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x+۱=\pm۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۴\Rightarrow x=۳\\ x+۱=-۴\Rightarrow x=-۵\end{cases}$$

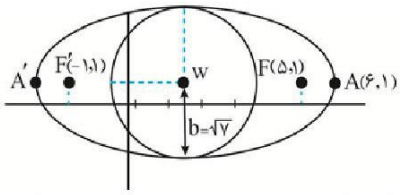
(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

59– گزینهٔ «۳» *(بابک سادات)*

مرکز بیضی: $w(\frac{-۱+۵}{۲},\frac{۱+۱}{۲})=(۲,۱)\xrightarrow{A(۶,۱)}a=۴$

$$b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۱۶-۹}=\sqrt{۷}$$

با توجه به نمودار:



حال $x^۲+y^۲=۲$ معادله دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد که با دایره مذکور متقاطع است.

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۲)

اختراعات و اکتشافات

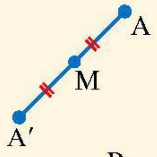
1 - اگر $A(۲,۱)$ یک سر قطر بزرگ بیضی و نقطهٔ $O(-۱,۲)$ مرکز بیضی باشد، فاصلهٔ سر دیگر قطر بزرگ بیضی تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۴۱}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱ تا ۴ و ۶ تا ۸ ـ ساده)

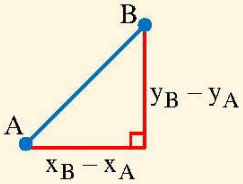
هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) اگر A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد، باید $AM = A'M$ باشد و M وسط AA' است، پس:



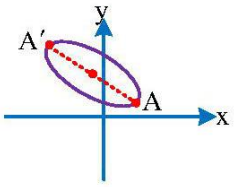
$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲}$$

۲) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با: $\sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$



۳) در بیضی دو سر قطر بزرگ نسبت به مرکز بیضی قرینه‌اند.

با توجه به درسنامه، اگر A' قرینهٔ نقطهٔ $(۲,۱)$ نسبت به نقطهٔ $(-۱,۲)$ باشد، داریم:



$$-۱ = \frac{۲ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} = -۴$$

$$۲ = \frac{۱ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} = ۳$$

از طرفی فاصلهٔ $(-۴,۳)$ از $(۰,۰)$ برابر است با:

$$\sqrt{(-۴-۰)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

سوالات منتخب:

اگر مختصات سه رأس یک متوازی‌الاضلاع $(-۲,۱)$، $(۰,۳)$ و $(۲,-۱)$ باشد، مختصات رأس چهارم آن کدام نمی‌تواند باشد؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(-۴,۵)$ ۳) $(۰,-۳)$ ۴) $(۶,۳)$ ✓

(راهنمایی: در متوازی‌الاضلاع وسط قطرها بر هم منطبق است.)

گروه آموزشی ماز

2 - اگر خط Δ با معادله $ax+۳y=۰$ بر خط $۲x+by=۳$ عمود باشد، معادلهٔ خطی که بر خط Δ در نقطهٔ $(۱,۲)$ عمود است، کدام است؟

۱) $y+۲x=۴$ ۲) $x+۲y=۵$

۳) $y+۲x=۳$ ۴) $x+۲y=۴$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱ تا ۱۰ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ می‌گذرد به صورت $y - y_۰ = m(x - x_۰)$ است.

۲) اگر خط Δ عمود بر خط d باشد، خطی که بر خط Δ عمود است موازی خط d می‌باشد.

۳) شرط عمود بودن دو خط بر هم این است که شیب آن‌ها معکوس و قرینهٔ هم باشد.

۴) شرط موازی بودن دو خط این است که شیب آن‌ها برابر باشد (برای به دست آوردن شیب یک خط y را در یک طرف معادله تنها کن، ضریب x در طرف دیگر برابر شیب خط است.)

مثلاً شیب خط $۲y+۶x+۱=۰$ برابر -۳ است چون: $۲y = -۶x - ۱ \Rightarrow y = -۳x - \frac{۱}{۲}$

به عبارتی اگر معادلات دو خط به صورت $y = m'x + h'$ و $y = mx + h$ باشد.

اگر دو خط بر هم عمود باشند، باید $(mm' = -۱)$ باشد و اگر دو خط با هم موازی باشند، باید $m = m'$ باشد و برای این که منطبق نباشند باید $h \neq h'$ باشد

و اگر معادلات آن‌ها به صورت: $a'x + b'y + c' = ۰$ و $ax + by + c = ۰$ باشد.

اگر دو خط بر هم عمود باشند، باید $\frac{aa'}{bb'} = -۱$ باشد و اگر دو خط با هم موازی باشند، باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد.

توجه کن اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد دو خط بر هم منطبق میشن.

۵) اگر دو خط در نقطهٔ H بر هم عمود باشند؛ مختصات H در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند و شیب دو خط معکوس و قرینهٔ هم است.

نقطهٔ $(۱,۲)$ روی خط Δ قرار دارد پس مختصات آن در معادلهٔ Δ صدق می‌کند. یعنی:

روش اول:

$$ax+۳y=۰ \xrightarrow{(۱,۲)} a+۶=۰ \Rightarrow a=-۶$$

با توجه به این که خط $ax+۳y=۰$ بر خط $۲x+by=۳$ عمود است و بنا به شرط عمود بودن داریم:

$$\frac{۲a}{۳b}=-۱ \Rightarrow ۲a=-۳b \xrightarrow{a=-۶} -۱۲=-۳b \Rightarrow b=۴$$

بنابراین به دنبال خطی موازی $۲x+۴y=۳$ هستیم که از $(۱,۲)$ عبور کند که معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۱) \Rightarrow x+۲y=۵$$

روش دوم: به دنبال خطی عمود بر $-۶x+۳y=۰$ پس شیب آن $\frac{-۱}{۲}$ است و از $(۱,۲)$ می‌گذرد.

سوالات منتخب:

اگر $A(۲,۱)$ مختصات یک رأس مستطیل ABCD باشد و معادلهٔ ضلع BC به صورت $۲x+۴y=k$ باشد معادلهٔ ضلع AB کدام است؟

۱) $x+۲y=۴$ ۲) $x+۲y=-۴$

۳) $۲x-y=۳$ ✓ ۴) $۲x-y=-۳$

www.biomaze.ir

3 - اگر $B(۱,۲)$ و $B'(-۳,-۴)$ دو سر قطر کوچک بیضی باشند، خطی که بر قطر بزرگ بیضی منطبق است، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱ تا ۱۰ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) قطرهای بیضی عمودمنصف یکدیگرند.

۲) برای به دست آوردن عرض نقطهٔ برخورد یک خط با محور yها، (عرض از مبدأ) کافیست در معادلهٔ خط به جای x صفر بگذاریم و y را بدست آوریم. همینطور برای بدست آوردن طول نقطهٔ برخورد یک خط با محور xها، (طول از مبدأ) کافیست در معادلهٔ خط بجای y صفر بگذاریم و x را بدست آوریم.

$$ax+by+c=۰ \begin{cases} \xrightarrow{x=۰} y=-\frac{c}{b} \\ \xrightarrow{y=۰} x=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

خُب در واقع باید عرض از مبدأ معادلهٔ عمودمنصف BB' را به دست بیاریم، پس باید شیب BB' و وسط B و B' رو بدست میاریم تا معادله خط BB' رو مشخص کنیم.

$$m_{BB'}=\frac{-۴-۲}{-۳-۱}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_{AA'}=-\frac{۲}{۳}$$

$$M=\frac{B+B'}{۲}=(\frac{-۳+۱}{۲},\frac{-۴+۲}{۲})=(-۱,-۱)$$

$$y+۱=-\frac{۲}{۳}(x+۱) \Rightarrow ۲x+۳y+۵=۰ \xrightarrow{x=۰} y=-\frac{۵}{۳}$$

سوالات منتخب:

سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:۲y-x=۳$ و $AC:y-۲x=۵$ و $BC:۲y+۳x=۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$ ✓ (سراسری تجربی ۹۸- خارج از کشور)

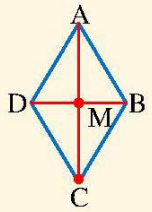
۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

4 - اگر $A(۲,۱)$ یک رأس لوزی ABCD و معادلهٔ قطر BD، $y=۲x+۲$ باشد، مختصات c کدام است؟

۱) $(۰,۷)$ ۲) $(-۶,۵)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(۰,۵)$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱ تا ۴ و ۶ تا ۸ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!



در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند.

یعنی M وسط AC و BD است و شیب AC و BD معکوس و قرینهٔ هم هستند.

اولاً باید وسط AC روی قطر BD باشد، ثانیاً باید AC بر BD عمود باشد. بنابراین اگر (x,y) مختصات c باشد باید $M(\frac{x+۲}{۲},\frac{y+۱}{۲})$ روی BD باشد یعنی:

$$\frac{y+۱}{۲}=۲(\frac{x+۲}{۲})+۲\Rightarrow y=۲x+۷$$

و چون شیب BD برابر ۲ است باید شیب AC برابر $(-\frac{۱}{۲})$ باشد یعنی:

$$\frac{y-۱}{x-۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲y-۲=-x+۲\Rightarrow ۲y+x=۴$$

در نهایت از حل دستگاه زیر مختصات c بدست میاد

$$\begin{cases} y=۲x+۷ \\ ۲y+x=۴ \end{cases}\Rightarrow ۲(۲x+۷)+x=۴\Rightarrow x=-۲\ ,\ y=۳$$

البته بجای روش بالا می‌تونستی گزینه‌ها را امتحان کنی!

www.biomaze.ir

5 - نقطهٔ $P(۳,۴)$ محل برخورد دو قطر مستطیل است. اگر معادلات دو ضلع مجاور مستطیل $۳x+۴y=۵$ و $۴x+my=۵$ باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۸ تا ۱۰ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) اگر دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ بر هم عمود باشند. باید $\frac{aa'}{bb'}=-۱$ باشد. (یعنی شیب‌ها معکوس و قرینه‌اند.)

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

اولاً باید $\frac{۳\times۴}{۴m}=-۱$ باشد پس $m=-۳$ است. حالا باید فاصلهٔ $P(۳,۴)$ رو از دو خط بدست بیاوریم:

فاصلهٔ P از $۳x+۴y-۵=۰$: $\frac{|۳\times۳+۴\times۴-۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴\Rightarrow$ طول مستطیل $=۸$

فاصلهٔ P از $۴x-۳y-۵=۰$: $\frac{|۴\times۳-۳\times۴-۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۱\Rightarrow$ عرض مستطیل $=۲$

(دقت کن فاصلهٔ محل برخورد قطرهای مستطیل تا طول و عرض مستطیل نصف طول و عرض مستطیله.)

بنابراین مساحت مستطیل برابر $۲\times۸=۱۶$ است.

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

۱- نقطهٔ $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خطی به معادله $2y-x=5$ است، مساحت این مربع، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰ ✔ *(سراسری تجربی ۹۳- خارج از کشور)*

۲- معادلهٔ دو ضلع غیرموازی مستطیلی: $3x+4y=1$ و $6y+bx+1=0$ و نقطه $A(1,2)$ یک رأس مستطیل است. اندازهٔ محیط این مستطیل کدام است؟

۱) ۵ ✔ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

گروه آموزشی ماز

6- مساحت مثلثی با رئوس $A(2,1)$، $B(3,-1)$ و $C(-1,0)$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱ تا ۱۰ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر مساحت یک مثلث به رئوس C و B و A را بخواهیم:

روش اول) اینه که طول یک ضلع مثلاً BC رو مشخص کنیم (طول قاعده) بعد معادلهٔ همون ضلع رو بدست بیاریم و فاصلهٔ نقطهٔ مقابل اون ضلع تا ضلع رو به کمک فاصلهٔ نقطه از خط بدست بیاری (طول ارتفاع) و در آخر مساحت رو محاسبه کنیم.

(خُب با توجه به این که روش اول طولانیه یه روش دومی ارائه میدیم که تو کتاب درسی نیست ولی خب خیلی سریع، حالا سلیقهٔ خودته از کدوم روش بری.)

روش دوم) به کمک مختصات دو جفت رأس مختصات دو بردار (که اضلاع مثلث هستند) رو مشخص می‌کنیم مثلاً برای بردار $\overrightarrow{AB}$ مختصاتش این جوریه (x_B-x_A, y_B-y_A) بعد که مختصات دو بردار رو به دست آوردیم:

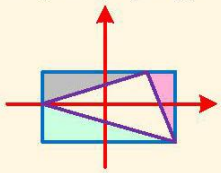
مثلاً: $\overrightarrow{AB}(x_0,y_0)$ و $\overrightarrow{AC}(x_1,y_1)$ مساحت رو از رابطهٔ زیر بدست میاریم:

$$S=\frac{|x_0y_1-x_1y_0|}{2}$$

توجه کن فرقی نمی‌کنه کدوم جفت از بردارها رو درنظر بگیری، راستی از این روش برای محاسبهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع هم می‌تونی استفاده کنی.

یه روش سومی هم داریم که هندسیه اونم اینجوریه که مثلث رو رسم کنی و دور اون یک مستطیل افقی یا عمودی بکشی مثل شکل زیر، اونوقت می‌تونی مساحت مستطیل رو به راحتی بدست بیاری و مساحت مثلث‌های اضافی رو از اون کم کنی تا مساحت مثلث مورد نظرت بدست بیاد.

این شکل و ببین:



روش اول: اول طول ضلع BC (a) رو به کمک فاصلهٔ دو نقطه بدست میاریم:

$$a=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-1-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{17}$$

حالا معادلهٔ خط BC رو مشخص می‌کنیم:

شیب BC: $m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{0-(-1)}{-1-3}=-\frac{1}{4}$

معادلهٔ BC: $y-y_0=m(x-x_0)$

$$y-0=-\frac{1}{4}(x+1)\Rightarrow x+4y+1=0$$

حالا فاصلهٔ A تا BC رو بدست میاریم (طول ارتفاع):

$$h=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2+4(1)+1|}{\sqrt{1+16}}=\frac{7}{\sqrt{17}}$$

در نهایت مساحت: $S=\frac{1}{2}ha=\frac{1}{2}\sqrt{17}\times\frac{7}{\sqrt{17}}=\frac{7}{2}$

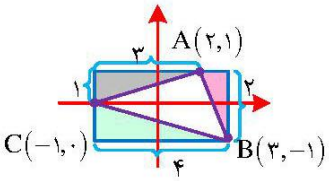
روش دوم: اول بردارها بعد هم فرمول مساحت:

$$\overrightarrow{AB} = (۳-۲, -۱-۱) = (۱, -۲)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-۱-۲, ۰-۱) = (-۳, -۱)$$

$$S = \frac{|(-۱)(۱)-(-۳)(-۲)|}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

روش سوم: یک نگاهم به روش هندسی بندازیم:



$$S_۱ = \frac{۳\times۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \text{ و } \text{مساحت مستطیل} = ۴\times۲ = ۸$$

$$S_۳ = \frac{۴\times۱}{۲} = ۲ \text{ و } S_۲ = \frac{۱\times۲}{۲} = ۱$$

$$\text{مساحت مثلث} = ۸-(\frac{۳}{۲}+۱+۲) = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

خدایی ببین روش ۲ چقدر کوتاهتره!

سوالات منتخب:

۱- اگر $A(-۲,۱)$، $B(۳,۲)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس یک مثلث باشند، مساحت مثلث کدام است؟ *(آزمون مازمون ۱۴۰۰)*

۱) ۸/۵ ✓ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۷

۲- خطوط $y=۲x$، $۲x+۳y=۸$ و محور xها اضلاع یک مثلث می‌باشند، مساحت مثلث کدام است؟ *(آزمون مازمون ۱۴۰۰)*

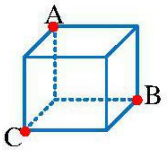
۱) ۶ ۲) ۴ ✓ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۲- خارج از کشور)*

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ✓ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

www.biomaze.ir

7 - سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از رئوس C، B و A با مکعب کدام است؟



۱) مثلث متساوی‌الاضلاع

۲) مثلث قائم‌الزاویه

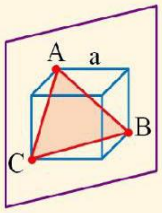
۳) مثلث متساوی‌الساقین

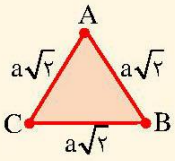
۴) مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۲ تا ۱۲۵ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس !

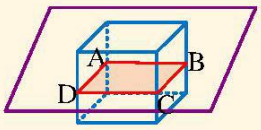
ـ سطح مقطع صفحه‌ای که از سه رأس مکعب بگذرد و این سه رأس انتهای سه یال باشند که در یک رأس مشترک است مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

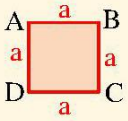




که اگر طول هر یال مکعب a باشد طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $a\sqrt{۲}$ است.

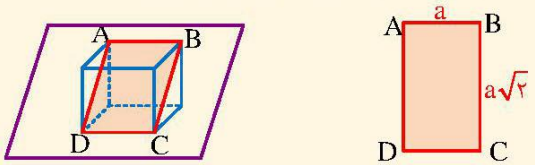
ـ سطح مقطع صفحهٔ موازی قاعده یک مکعب با آن یک مربعه



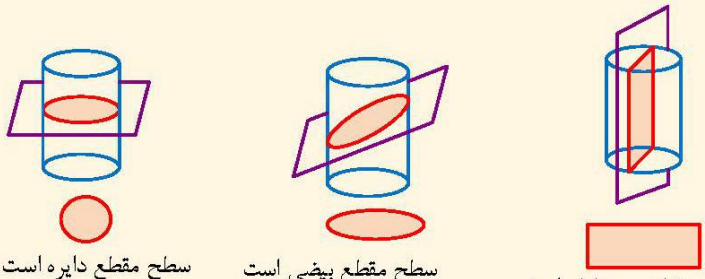


www.mapedu.ir

ـ سطح مقطع صفحه‌ای که از دو یال موازی و غیرواقع بر یک وجه مکعب می‌گذره هم یک مستطیل به طول $a\sqrt{2}$ و عرض a است.



ـ سطح مقطع یک صفحه با یک استوانه



سطح مقطع دایره است　　سطح مقطع بیضی است　　سطح مقطع مستطیل است

با توجه به درسنامه گزینه ۱ درسته.

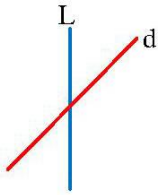
سوالات منتخب:

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با مکعبی به طول یال ۲، زمانی که صفحه از انتهای سه یالی که در یک رأس مشترک هستند عبور کنند، برابر کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ✓　　۲) $2\sqrt{2}$　　۳) $4\sqrt{3}$　　۴) $4\sqrt{2}$　　(آزمون ماز ۱۴۰۰)

گروه آموزشی ماز

8 - از دوران خط d حول خط L یک سطح مخروطی ایجاد شده است. اگر سطح مقطع برخورد صفحهٔ P با این سطح مخروطی یک دایره باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) صفحهٔ P موازی خط L است و شامل L نیست.

۲) صفحهٔ P بر خط L عمود است و از رأس عبور نمی‌کند.

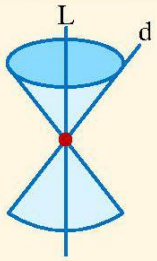
۳) صفحهٔ P موازی خط d است و شامل d نیست.

۴) صفحهٔ P با هیچ یک از دو خط d و L موازی نیست و از رأس عبور نمی‌کند و بر L هم عمود نیست.

پاسخ: گزینه ۲　　(ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۶ تا ۱۲۷ ـ ساده)

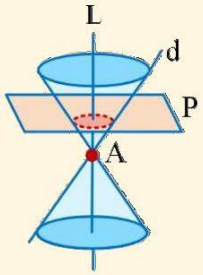
هر تست ماز یک کلاس درس!

از دوران خط d حول خط L یک سطح مخروطی به صورت زیر ایجاد می‌شود:

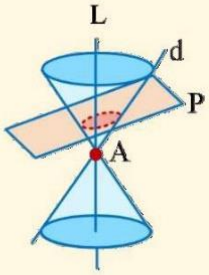


حالا سطح مقطع برخورد صفحهٔ P با این سطح مخروطی با توجه به وضعیت صفحهٔ P یکی از حالت‌های زیر است:

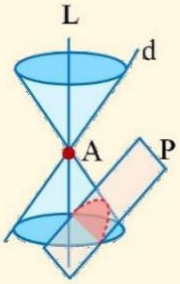
ـ اگر صفحهٔ P عمود بر خط L باشد و از رأس (محل برخورد دو خط) نگذرد، سطح مقطع دایره است.



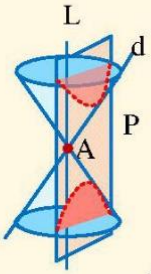
ـ اگر صفحهٔ P بر خط L (محور دوران) عمود نباشد و موازی خط d و دوران یافته‌های آن نباشد (مولد سطح مخروطی) و از رأس نگذرد در این صورت سطح مقطع یک بیضی است.



ـ اگر صفحهٔ P موازی خط d یا یکی از دوران یافته‌های آن باشد و از رأس عبور نکند، سطح مقطع یک سهمی است.



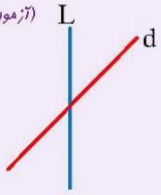
ـ اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را هم در بالا قطع کند و هم در پایین و از رأس عبور نکند و یا در حالت خاص صفحهٔ P موازی خط L باشد، سطح مقطع یک هذلولی است.



در ضمن در حالات بالا اگر صفحه از رأس عبور کند، اشتراک صفحه P با سطح مخروطی یا یک نقطه است یا دو خط متقاطع.

با توجه به درسنامه، گزینهٔ ۲ صحیح است.

خط d را حول خط L دوران می‌دهیم. سطح مقطع برخورد صفحه‌ای که موازی خط d است و از محل برخورد دو خط نمی‌گذرد، با سطح حاصل از دوران، برابر کدام است؟ (آزمون ماز ۱۴۰۰)



۱) بیضی

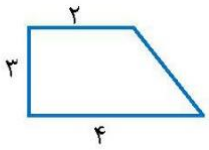
۲) دایره

۳) هذلولی

۴) سهمی ✓

www.biomaze.ir

9 - ذوزنقهٔ زیر را حول قاعدهٔ بزرگتر آن دوران داده‌ایم . حجم حاصل از دوران کدام است؟



۱) ۲۴π

۲) ۱۸π

۳) ۲۰π

۴) ۳۲π

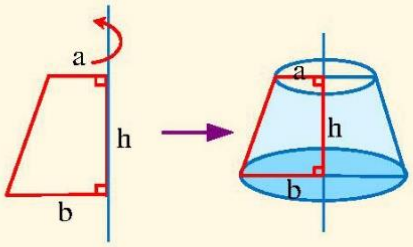
www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۲ و ۱۲۳ و تمرینات صفحه ۱۳۲ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

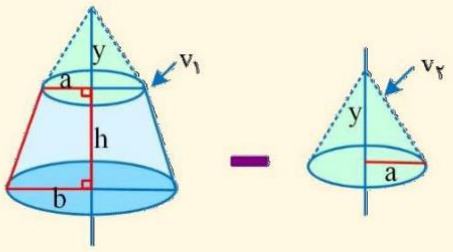
حجم‌های حاصل از دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه در حالت‌های مختلف:

حالت اول) محور دوران، ضلع عمود بر دو قاعده: (مخروط ناقص)



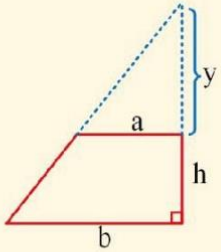
نگاش کن شبیه دیگه!

اگر دقت کنی می‌بینی این حجم رو میشه از تفاضل حجم دو تا مخروط به شکل زیر بدست بیاری.



$$v = v_1 - v_2$$

v_1 حجم مخروطی هست که از دوران مثلثی ایجاد شده که با امتداد دو ساق ذوزنقه شکل گرفته، و به کمک قضیه تالس می‌تونی طول ارتفاع مخروط با همون ضلع عمودی مثلث رو به دست بیاری این جوری



$$\xrightarrow{\text{طبق تالس}} \frac{y}{y+h} = \frac{a}{b}$$

راستی می‌تونی از رابطهٔ زیر هم برای بدست آوردن حجم مخروط ناقص استفاده کنی.

$$v = \frac{\pi}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

حالت دوم) محور دوران قاعدهٔ کوچک‌تر باشد:

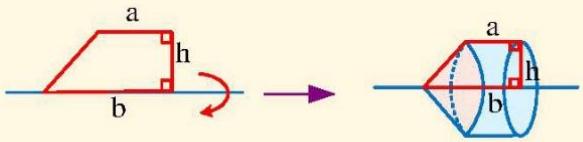
اگه دقت کنی می‌تونی حجم رو از کم کردن حجم یه مخروط از استوانه بدست آورد:

$v_1 = \pi h^2 b$ $\qquad$ $v_2 = \frac{\pi}{3} h^2 (b-a)$

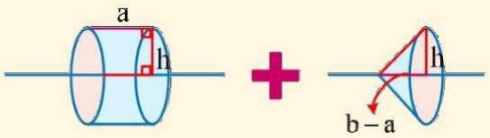
$$v = v_1 - v_2 = \pi h^2 b - \frac{1}{3}\pi h^2 (b-a)$$

$$\Rightarrow v = \pi h^2 \left(\frac{2b+a}{3}\right)$$

حالت سوم) محور دوران قاعدهٔ بزرگتر باشد.



حجم بالا از مجموع دو حجم زیر بدست میاد.



$$v_1 = \pi h^2 a \qquad v_2 = \frac{\pi}{3} h^2 (b-a)$$

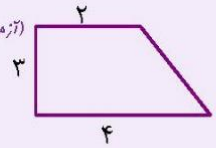
$$v = v_1 + v_2 = \pi h^2 a + \frac{\pi}{3} h^2 (b-a) \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} h^2 (b+2a)$$

بر طبق حالت سوم درسنامه:

$$v = \frac{\pi}{3}(3)^2 (4 + 2\times 2) = 24\pi$$

سوالات منتخب:

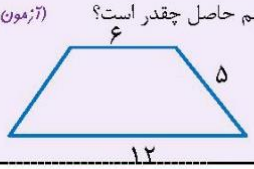
۱- ذوزنقهٔ شکل زیر را حول قاعدهٔ کوچک آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*



۱) 20π ۲) 42π

۳) 30π ✓ ۴) 18π

۲- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر را حول خطی که وسط دو قاعده را به هم وصل می‌کند، دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

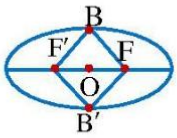


۱) 60π ۲) 114π

۳) 56π ۴) 84π ✓

گروه آموزشی ماز

10 - خروج از مرکز بیضی زیر $\frac{\sqrt{7}}{4}$ و طول قطر کوچک آن ۳ است، محیط چهارضلعی $BFB'F'$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۱۲

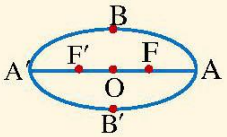
۳) ۱۶

۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۸ تا ۱۳۰ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در هر بیضی:



$FF' = ۲c$ (فاصلهٔ کانونی)

$BB' = ۲b$ (قطر کوچک)

$AA' = ۲a$ (قطر بزرگ)

و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است و

$A'F' = AF = a - c$ و $A'F = AF' = a + c$

$BF = BF' = B'F = B'F' = a$

(چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی است.)

همینطور خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است.

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۷}}{۴}a$ و $BB' = ۲b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow[c=\frac{\sqrt{۷}}{۴}a]{b=\frac{۳}{۲}} a^۲ = \frac{۹}{۴} + \frac{۷}{۱۶}a^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۱۶}a^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۲$

بنابراین محیط لوزی برابر $۴a$ یعنی ۸ است.

سوالات منتخب:

۱- در یک بیضی، مختصات کانون‌ها $(۱,۱)$ و $(۱,۹)$ است. هرگاه خروج از مرکز بیضی ۰/۸ باشد، مختصات یک سر قطر کوچک بیضی کدام است؟ (آزمون ۱۴۰۰)

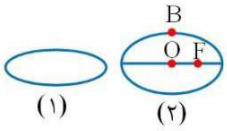
۱) $(۲,۵)$ ۲) $(۳,۵)$ ۳) $(-۲,۵)$ ✔ ۴) $(-۳,۵)$

۲- چهار خط $x = -۲$ ، $x = ۸$ ، $y = -۱$ و $y = ۷$ بر یک بیضی مماس هستند. خروج از مرکز بیضی کدام است؟ (آزمون ۱۴۰۰)

۱) ۰/۶ ✔ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۵

www.biomaze.ir

11 - اگر $e_۱$ خروج از مرکز بیضی شکل (۱) و $e_۲$ خروج از مرکز بیضی شکل (۲) باشد که در آن زاویهٔ $B\hat{F}O = ۵۰^\circ$ ، کدام گزینه درست است؟



۱) $e_۱ > e_۲ > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $e_۲ > \frac{\sqrt{۲}}{۲} > e_۱$

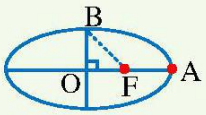
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲} > e_۲ > e_۱$ ۴) $e_۱ > \frac{\sqrt{۲}}{۲} > e_۲$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۱ ـ ساده)

نکته) در بیضی اگر $b = c$ باشد، در این صورت رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ به شکل $a^۲ = ۲c^۲$ در می‌آید که در نتیجه خروج از مرکز یعنی $\frac{c}{a}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌شود و هر چه بیضی لاغرتر باشد خروج از مرکز هم به یک نزدیک‌تر می‌شود و هر چه بیضی به دایره شبیه‌تر باشد خروج از مرکز به صفر نزدیک می‌شود.

$۱ > e_۱ > e_۲ > \frac{\sqrt{۲}}{۲} > e_۳ > ۰$

نکته)



چون $OF = c$ و $OB = b$ ، پس طبق فیثاغورس:

$BF^۲ = OF^۲ + OB^۲ = b^۲ + c^۲ = a^۲ \Rightarrow BF = a$

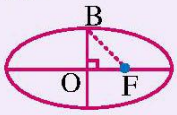
بنابراین کسینوس زاویهٔ $B\hat{F}O$ برابر $\frac{OF}{BF}$ یا همان $\frac{c}{a}$ (یعنی خروج از مرکز بیضی) است.

www.mapedu.ir

با توجه به درسنامه، حتماً $e_1 > e_2$ پس یا گزینهٔ ۱ درست یا گزینه ۴. از طرفی چون کسینوس زاویهٔ $B\hat{F}O$ برابر خروج از مرکز بیضی است و $\cos 50^\circ$ کوچکتر از $\cos 45^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است پس گزینه ۴ صحیح است.

سوالات منتخب:

در بیضی زیر مثلث FOB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟ *(آزمون ۱۴۰۰)*



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

گروه آموزشی ماز

12 - نقطهٔ $M(1,y)$ روی محیط یک بیضی با کانون‌های $F(2,3)$ و $F'(-4,3)$ قرار دارد. اگر خروج از مرکز بیضی برابر ۰/۶ باشد. محیط مثلث MFF' چقدر است؟

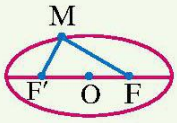
۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ و ۳ ـ صفحه ۱۲۸ تا ۱۳۲ ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۶ ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکات مربوط به بیضی:

۱) هرگاه نقطهٔ M روی محیط یک بیضی باشد، مجموع فواصل M از دو کانون بیضی برابر $2a$ می‌باشد.

$$MF + MF' = 2a$$



۲) فاصلهٔ کانون‌های یک بیضی برابر $2c$ می‌باشد. $(FF' = 2c)$

۳) خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است.

نکته) می‌دانیم اگر دو نقطه دارای عرض (یا طول)های یکسان باشند فاصلهٔ دو نقطه برابر قدرمطلق تفاضل طول (یا عرض)های آن‌هاست. یعنی:

$$A(x_A, y_.), B(x_B, y_.) \Rightarrow AB = |x_A - x_B|$$

$$C(x_., y_C), D(x_., y_D) \Rightarrow CD = |y_C - y_D|$$

محیط MFF' برابر $(\underbrace{MF + MF'}_{2a} + \underbrace{FF'}_{2c})$ است. از طرفی:

$$FF' = |-4-2| = 6 = 2c \Rightarrow c = 3$$

و خروج از مرکز که برابر ۰/۶ است، پس:

$$\frac{c}{a} = \frac{6}{10} \xrightarrow{c=3} \frac{3}{a} = \frac{6}{10} \Rightarrow a = 5$$

بنابراین محیط مثلث برابر $2a + 2c = 10 + 6 = 16$ است.

سوالات منتخب:

۱- اگر M نقطهٔ دلخواهی روی محیط یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ و قطر کوچک $4\sqrt{2}$ باشد، محیط مثلث MFF' برابر کدام است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

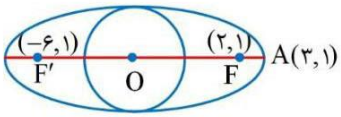
۱) $2 + 4\sqrt{2}$ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ✓ ۴) ۱۰

۲- در یک بیضی به کانون‌های $(2,-1)$ و $(2,7)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۸)*

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸ ✓

www.biomaze.ir

13 - معادلهٔ دایرهٔ زیر کدام است؟



۱) $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 5$

۲) $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$

۳) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 5$

۴) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۸ تا ۱۳۷ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع r به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ (معادلهٔ استاندارد دایره) یا به صورت $x^2+ax+y^2+by+c=0$ (معادلهٔ گستردهٔ دایره) است که در آن $a=-2\alpha$ و $b=-2\beta$ و $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$ یعنی مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ است و شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ است.

به جای حفظ کردن رابطه‌های بین معادلهٔ استاندارد و گسترده می‌تونی به کمک اتحاد فرعی $(u^2\pm mu=(u\pm\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4})$ معادلهٔ گسترده رو به استاندارد تبدیل کنی و مرکز و شعاع دایره رو مشخص کنی.

نمونه) مرکز و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $x^2-6x+y^2+4y-3=0$ را مشخص کنید.

$$x^2-6x=(x-3)^2-9$$

نصف شده (-6) به توان دو رسیده (-3)

$$y^2+4y=(y+2)^2-4$$

نصف شده $(+4)$ به توان دو رسیده $(+2)$

خلاصه معادلهٔ دایره به صورت زیر تبدیل شده:

$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4-3=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

که مرکز اون $(3,-2)$ است. (ریشه‌های پرانتزهای اول و دوم) و شعاع اونم ۴ (جذر ۱۶).

اول مرکز بیضی رو مشخص می‌کنیم که همون مرکز دایره است و بعد پارامتر b رو (نصف قطر کوچک بیضی) که b همون شعاع دایره است.

مرکز بیضی وسط دو کانونه بیضیه. پس:

$$O=\frac{F+F'}{2}=(\frac{-6+2}{2},\frac{1+1}{2})=(-2,1)$$

از طرفی:

$$FF'=2c=|2-(-6)|=8\Rightarrow c=4$$

$$AO=a=|3-(-2)|=5\Rightarrow a=5$$

و طبق رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ که در بیضی برقراره داریم:

$$25=b^2+16\Rightarrow b^2=9\Rightarrow b=3$$

و معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-2,1)$ و شعاع ۳ به صورت زیر است:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9\Rightarrow x^2+4x+y^2-2y=4$$

سوالات منتخب:

۱- معادله دایره‌ای با بزرگترین شعاع که در ناحیه سوم بر سه خط $\begin{cases}x=0\\y=0\\3x+4y+12=0\end{cases}$ مماس باشد، کدام است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

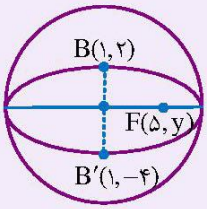
۱) $x^2+y^2+12(x+y)+36=0$ ✔

۲) $x^2+y^2+12(x+y)+6=0$

۳) $x^2+y^2+12(x+y)+24=0$

۴) $x^2+y^2+12(x+y)=36$

۲- معادلهٔ دایرهٔ روبه‌رو کدام است؟



۱) $x^2-2x+y^2+2y=23$ ✔

۲) $x^2+2x+y^2-2y=23$

۳) $x^2+2x+y^2-2y=98$

۴) $x^2-2x+y^2+2y=98$

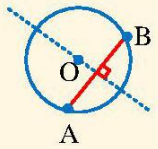
14 - شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(3,2)$ می‌گذرد و معادلهٔ یکی از قطرهای آن $y=2x$ است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ و ۳ ـ صفحه ۱ تا ۶ ریاضی ۲ ، صفحه ۱۳۴ تا ۱۳۷ ریاضی ۳ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- اگر یک منحنی از نقطهٔ A عبور کند مختصات A در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.
- همین‌طور می‌دانیم فاصلهٔ مرکز دایره تا هر نقطه روی محیط آن برابر شعاع دایره است.
- قطر دایره از مرکز می‌گذرد.
- اگر دو نقطه از محیط دایره را داشته باشیم مرکز روی عمودمنصف این دو نقطه قرار دارد.



روش اول: باید مختصات نقاط A و B در معادلهٔ گستردهٔ دایره صدق کند و چون مرکز روی خط $y=2x$ قرار دارد مختصات آن به صورت $(\alpha,2\alpha)$ است. یعنی:

$$\alpha=-\frac{a}{2} \text{ و } 2\alpha=-\frac{b}{2}\Rightarrow b=2a$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\xrightarrow{(1,0)} 1+a+c=0 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(3,2)} 9+4+3a+2b+c=0 \xrightarrow{b=2a} \begin{cases} a+c=-1 \\ 7a+c=-13 \end{cases} \Rightarrow a=-2, c=1, b=-4$$

از طرفی:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$$

روش دوم: دیدیم مختصات مرکز به صورت $(\alpha,2\alpha)$ است و باید فاصلهٔ آن تا نقاط A و B یکسان بوده و برابر شعاع دایره باشد، یعنی:

$$OA=OB=r\Rightarrow\sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha-0)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha-2)^2}$$

$$\cancel{\alpha^2}-2\alpha+1+\cancel{4\alpha^2}=\cancel{\alpha^2}-6\alpha+9+\cancel{4\alpha^2}-8\alpha+4\Rightarrow 12\alpha=12\Rightarrow\alpha=1$$

$$r=\sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha)^2}\xrightarrow{\alpha=1} r=2$$

روش سوم: می‌تونیم معادلهٔ عمودمنصف خط AB رو بنویسیم و با قطر دایره برخورد دهیم (دو معادله، دو مجهول) جواب مختصات مرکز است.

$$m_{AB}=\frac{2-0}{3-1}=1\Rightarrow(\text{شیب عمودمنصف}=-1)$$

$$\text{مختصات وسط AB}=\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(2,1)$$

$$\text{معادلهٔ عمودمنصف: } y-1=-1(x-2)\Rightarrow y+x=3$$

$$\begin{cases} y+x=3 \\ y=2x \end{cases}\Rightarrow 2x+x=3\Rightarrow x=1, y=2$$

پس مختصات مرکز $(1,2)$ است حالا فاصلهٔ مرکز رو تا یکی از نقاط A یا B بدست میاریم:

$$r=OA=\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2}=2$$

سوالات منتخب:

۱- دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۵- خارج از کشور)*

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ✓ ۴) ۳

۲- دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۰- خارج از کشور)*

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ✓ ۴) ۳

۳- شعاع دایره گذرنده از سه نقطهٔ $A(1,2)$، $B(-3,2)$ و $C(1,4)$ برابر کدام است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

۱) ۲ ۲) $\sqrt{5}$ ✓ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

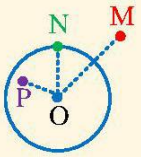
15 - اگر نقاط $A(m,1)$ و $B(-1,m)$ به ترتیب درون و بیرون دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+2x+y^2-8y-8=0$ باشند، حدود m کدام است؟

۱) $3<m<9$ ۲) $-9<m<-3$ ۳) $-5<m<-1$ ۴) $1<m<5$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۴ تا ۱۳۷ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

یک نقطه نسبت به دایره سه حالت دارد:



حالت اول) نقطه بیرون دایره باشد (مانند نقطهٔ M)، در این صورت $OM>r$ است و با قرار دادن مختصات M در معادلات گسترده و استاندارد دایره داریم:

$x_M^2+y_M^2+ax_M+by_M+c>0$ (معادلهٔ گسترده)

$(x_M-\alpha)^2+(y_M-\beta)^2>r^2$ (معادلهٔ استاندارد)

حالت دوم) نقطه روی محیط دایره باشد (مانند نقطهٔ N)، در این صورت $ON=r$ است و مختصات N در معادلات گسترده و استاندارد دایره صدق می‌کند، یعنی:

$x_N^2+y_N^2+ax_N+by_N+c=0$

$(x_N-\alpha)^2+(y_N-\beta)^2=r^2$

حالت سوم) نقطه درون دایره باشد (مانند نقطهٔ P)، در این صورت $OP<r$ و با قرار دادن مختصات P در معادلات گسترده و استاندارد دایره داریم:

$x_P^2+y_P^2+ax_P+by_P+c<0$

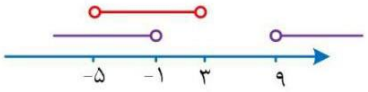
$(x_P-\alpha)^2+(y_P-\beta)^2<r^2$

با توجه به درسنامه، مختصات نقاط A و B را در معادلهٔ گستردهٔ دایره $x^2+2x+y^2-8y-8=0$ قرار می‌دهیم، در این صورت داریم:

$\xrightarrow{\text{درون دایره } A(m,1)} m^2+2m-15<0 \Rightarrow -5<m<3$

$\xrightarrow{\text{بیرون دایره } B(-1,m)} m^2-8m-9>0 \Rightarrow m<-1$ یا $9<m$

که اشتراک در حالت بالا $-5<m<-1$ است.



سوالات منتخب:

۱- هرگاه $A(2,1)$ نقطه‌ای داخل دایره $x^2+y^2+ax-2y=0$ و $B(5,2)$ نقطه‌ای خارج همان دایره باشد، حدود a کدام است؟ *(آزمون ماز ۱۴۰۰)*

۱) $-\frac{3}{2}<a<5$ ۲) $-5<a<-\frac{3}{2}$ ✓ ۳) $a<-5$ ۴) $a>\frac{3}{2}$

۲- وضعیت نقاط $A(2,1)$ و $B(-2,3)$ و $C(-1,1)$ نسبت به دایره‌ای با معادلهٔ $x^2+y^2-2y-3=0$ به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

۱) روی محیط ـ بیرون ـ درون ✓
۲) روی محیط ـ درون ـ بیرون
۳) بیرون ـ روی محیط ـ درون
۴) بیرون ـ درون ـ روی محیط

گروه آموزشی ماز

16 - دورترین فاصلهٔ نقطهٔ $(-1,3)$ تا دایره‌ای که معادلهٔ یکی از قطرهای آن $2y+x=0$ است و بر دو خط $3x+4y=7$ و $3x+4y+3=0$ مماس است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ و ریاضی ۳ ـ صفحه ۸ تا ۱۰ ریاضی ۲، صفحه ۱۳۴ تا ۱۳۷ ریاضی ۳ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

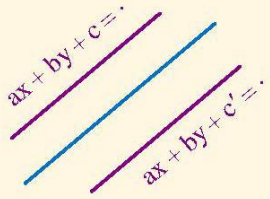
فاصلهٔ دو خط موازی:

ـ اگر معادلات دو خط موازی به صورت $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ باشند، فاصلهٔ دو خط از رابطهٔ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می‌آید.

(البته می‌تونی یک نقطهٔ دلخواه از یکی از خطوط رو انتخاب کنی و فاصلهٔ اون نقطه رو تا خط دیگه بدست بیاری.)

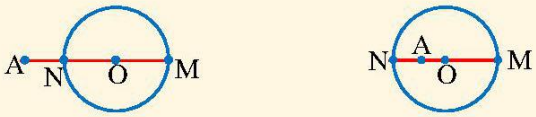
ـ معادلهٔ خطی که موازی دو خط موازی بالاست و وسط دو خط قرار دارد به صورت $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$ است.

$$ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$



ـ دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره‌ای به مرکز O و شعاع r برابر است با $(AM=OA+r)$

ـ نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره‌ای به مرکز O و شعاع r برابر است با $(AN=|OA-r|)$



ابتدا فاصلهٔ دو خط $3x+4y-7=0$ و $3x+4y+3=0$ رو بدست میاریم که برابر قطر دایره است.

$$\frac{|3-(-7)|}{\sqrt{9+16}}=2=2r\Rightarrow r=1$$

بعد معادلهٔ خطی که موازی دو خط مماس بر دایره است و وسط دو خط هست رو بدست میاریم.

$3x+4y-2=0$ (این خط هم یکی از قطرهای دایره است)

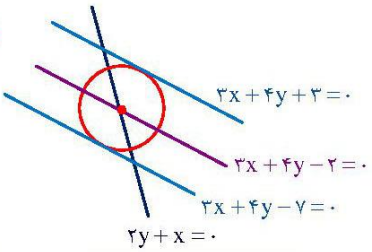
حالا از برخورد دو قطر دایره مختصات مرکز رو بدست میاریم:

$$\begin{cases}3x+4y-2=0\\2y+x=0\end{cases}\Rightarrow x=2\ ,\ y=-1$$

در آخر برای محاسبهٔ دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایره، فاصلهٔ AO رو بدست می‌آوریم و با شعاع جمع می‌کنیم:

$$AO=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-3)^2}=5$$

$$AM=AO+r=5+1=6$$



سوالات منتخب:

۱- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{25}{8}$ ✔ ۴) $\frac{25}{4}$

۲- معادلات دو ضلع از یک مربع به صورت‌های $y=2x$ و $2y-4x=5$ می‌باشند، مساحت مربع کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۸)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ✔ ۴) $\frac{6}{5}$

۳- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,2)$ از دورترین نقطهٔ دایرهٔ $x^2-2x+y^2+4y-4=0$ برابر کدام است؟ (آزمون ماز ۱۴۰۰)

۱) ۱۰ ۲) ۸ ✔ ۳) ۷ ۴) ۹

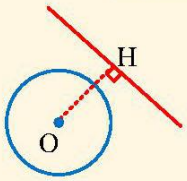
17 - دایره‌ای به معادلهٔ $x^2-2x+y^2+6y=m$ که بر خط به معادلهٔ $3x-4y=0$ مماس است از خطی به معادلهٔ $3x+4y=1$ وتری به طول L جدا می‌کند L کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

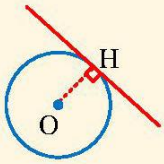
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ و ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۸ و ۱۳۹، صفحه ۸ تا ۱۰ ریاضی ۲ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

وضعیت خط و دایره:



حالت اول) خط d با دایره برخورد ندارد. $OH > r$



حالت دوم) خط d بر دایره مماس است. $OH = r$

در این حالت اگر معادلهٔ خط d را با دایره برخورد دهیم (در یک دستگاه حل کنیم) جواب مختصات نقطهٔ H می‌باشد و با جایگذاری معادلهٔ خط d در دایره‌ای معادله‌ای بدست می‌آید که ریشهٔ مضاعف دارد.

نمونه) خط $y=x$ بر دایرهٔ $x^2+3x+y^2+5y+a=0$ مماس است.

الف) a را بدست آورید.

$$\xrightarrow{y=x} x^2+3x+x^2+5x+a=0 \Rightarrow 2x^2+8x+a=0$$

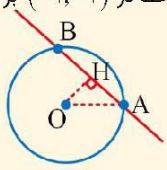
$$\Delta = 64-8a=0 \Rightarrow a=8$$

ب) مختصات نقطهٔ تماس چیست؟

با قرار دادن $a=8$ در رابطهٔ آخر داریم:

$$2x^2+8x+8=0 \Rightarrow 2(x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$$

و با قرار دادن $x=-2$ در معادلهٔ $y=x$ ، $y=-2$ بدست می‌آید پس خط در $(-2,-2)$ بر دایره مماس است.



حالت سوم) خط d با دایره در دو نقطه برخورد دارد. $OH < r$

در این حالت به کمک رابطهٔ $OA^2 = OH^2 + AH^2$ (که در آن $OA = r$ و $AH = \frac{1}{2}AB$) طول وتر AB بدست می‌آید.

محاسبهٔ طول OH:

اگر معادلهٔ خط d $(ax+by+c=0)$ بوده و مختصات $O(\alpha,\beta)$ باشد، با توجه به فرمول فاصلهٔ نقطه از خط طول OH برابر است با: $\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

اولاً باید فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $\underbrace{x^2-2x}_{(x-1)^2-1}+\underbrace{y^2+6y}_{(y+3)^2-9}=m$ یعنی $(1,-3)$ رو (دقت کن از رابطهٔ $\alpha=-\frac{a}{2}$ و $\beta=-\frac{b}{2}$ هم میشه مختصات مرکز رو بدست بیاری) از خط $3x-4y=0$ رو بدست بیاریم تا شعاع دایره مشخص بشه، یعنی:

$$r=\frac{|3-4(-3)|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

بعد بریم سراغ فاصلهٔ مرکز تا خط $3x+4y-1=0$ تا به کمک رابطهٔ فیثاغورس و این فاصله، نصف طول وتر را بدست بیاریم:

$$OH=\frac{|3+4(-3)-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

حالا داریم:

$$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲}$$

$$\xrightarrow{OA=r=۳\ ,\ OH=۲} ۹ = ۴ + AH^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{۵}$$

بنابراین: $AB = ۲\sqrt{۵}$

سوالات منتخب:

۱- به ازای کدام مقدار m، خط به معادله $y = mx + ۲$ بر دایره $x^{۲} + y^{۲} - ۲x = ۳$ مماس است؟ *(کنکور سراسری تجربی - ۹۱ خارج)*

۱) $۰, -\frac{۴}{۳}$ ۲) $۰, \frac{۴}{۳}$ ✓ ۳) $۱, -\frac{۲}{۳}$ ۴) $۱, \frac{۲}{۳}$

۲- دایره به مرکز $(۲, ۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ *(کنکور سراسری تجربی - ۸۶)*

۱) $۱, ۳$ ✓ ۲) $۰, ۴$ ۳) $\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}$ ۴) $۲-\sqrt{۲}, ۲+\sqrt{۲}$

۳- نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۳, -۵$ ✓ ۲) $۲, -۴$ ۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$ *(کنکور سراسری تجربی - ۹۸ خارج)*

۴- دایره‌ای به مرکز $(۲, -۱)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = ۱$، محور xها با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۱, ۳$ ✓ ۲) $۱, ۴$ ۳) $۲, ۳$ ۴) $۱/۵, ۴$

گروه آموزشی ماز

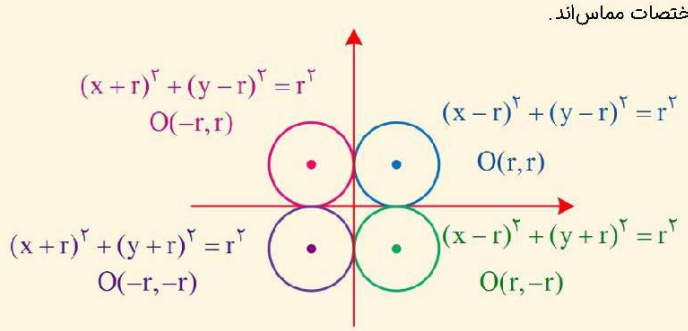
18 - اختلاف شعاع‌های دوایری که بر دو محور مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ می‌گذرند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

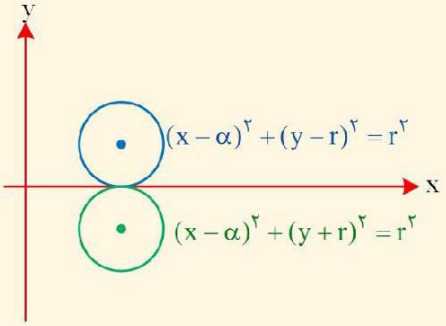
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۸ و ۱۳۹ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

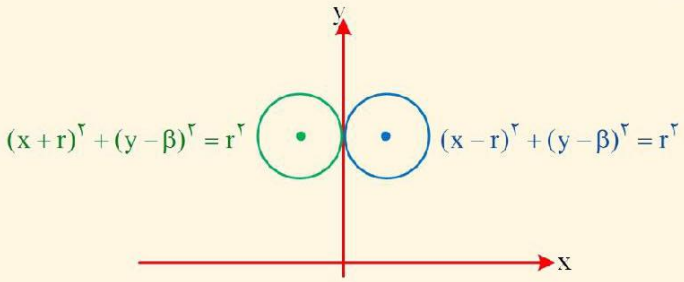
معادله دایره‌هایی که بر محورهای مختصات مماس‌اند.



همین طور اگر دایره‌ای بر محور xها مماس باشد، قدرمطلق عرض مرکز دایره برابر شعاع دایره است. در این صورت معادلهٔ دایره با توجه به بالا یا پایین بودن محور xها به یکی از دو صورت زیر است:



همین‌طور اگر دایره‌ای بر محور yها مماس باشد، قدر مطلق طول مرکز دایره برابر شعاع دایره است. در این صورت معادلهٔ دایره با توجه به راست یا چپ بودن محور yها به یکی از دو صورت زیر است:



با توجه به این که نقطهٔ $(-2,1)$ در ناحیهٔ دو قرار دارد، مرکز دایره هم درناحیهٔ دوم محورهای مختصات است و معادلهٔ این دایره به صورت $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ است. حالا با صدق دادن نقطهٔ $(-2,1)$ در معادلهٔ دایره، مقادیر شعاع رو بدست میاریم.

$$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2 \Rightarrow 4-4r+r^2+1-2r+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}$$

$$r^2-6r+5=0 \Rightarrow r_1=1\,,\,r_2=5 \Rightarrow |r_2-r_1|=4$$

سوالات منتخب:

۱- دایره‌ای به معادلهٔ $a(x^2+y^2)+b(x+y)=0$ از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرد، شعاع دایره چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{b}{a}$ ۳) $a\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

۲- دایره گذرا بر نقطهٔ $(1,-2)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور)*

۱) $(1,4)$ ۲) $(1,5)$ ✓ ۳) $(2,4)$ ۴) $(2,5)$

www.biomaze.ir

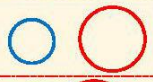
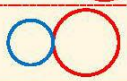
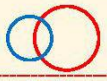
19- وضعیت دو دایرهٔ $2x^2+ay^2+(a+2)x=0$ و $x^2-6x+y^2-6y+2=0$ نسبت به هم، کدام است؟

۱) متقاطع ۲) مماس درون ۳) مماس بیرون ۴) متخارج

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ و ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۹ تا ۱۴۱ ریاضی ۳، صفحه ۵ ریاضی ۲)

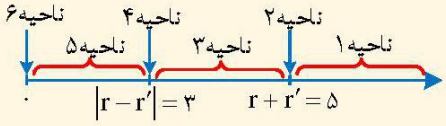
هر تست ماز یک کلاس درس!

حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم

۱) دو دایره متخارج‌اند	$OO'>r+r'$	
۲) دو دایره مماس بیرون‌اند.	$OO'=r+r'$	
۳) دو دایره متقاطع‌اند.	$\lvert r-r'\rvert<OO'<r+r'$	
۴) دو دایره مماس درون‌اند.	$OO'=\lvert r-r'\rvert$	
۵) دو دایره متداخل‌اند.	$0<OO'<\lvert r-r'\rvert$	
۶) دو دایره هم مرکزند.	$OO'=0$	

www.mapedu.ir

برای این که تشخیص بدی کدوم حالته روی محور اعداد $|r-r'|$ و $r+r'$ رو مشخص کن بعد ببین OO' کجای محور قرار می‌گیره اگر OO' در مکان ۱ باشد. دو دایره حالت اول دارند (یعنی متخارجن) و اگر OO' در مکان ۲ باشه دو دایره مماس بیرونن یعنی حالت ۲ و همین‌طور OO' تو هر ناحیه باشه شمارهٔ اون ناحیه همون حالت بین دو دایره است.



نکته) معادلهٔ $mx^۲+nx+ky^۲+py+q=۰$ به شرطی معادلهٔ یک دایره است که $m=k$ باشد و بعد از تقسیم کردن به m و بدست آوردن معادلهٔ گسترده، به صورت $x^۲+ax+y^۲+by+c=۰$، شعاع دایره یعنی $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ هم مثبت باشد.

اولاً با توجه به شرط دایره بودن (یعنی برابری ضریب $x^۲$ و $y^۲$) $a=۲$ و معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$۲x^۲+۲y^۲+۴x=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+y^۲=۱$$

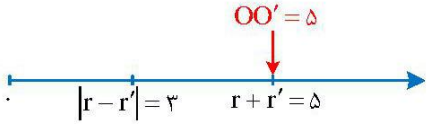
پس مرکز دایره $O(-۱,۰)$ و شعاع اون هم $r=۱$ است. حالا اگر معادله دایرهٔ دوم رو هم استاندارد کنیم داریم:

$$x^۲-۶x+y^۲-۶y+۲=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲-۹+(y-۳)^۲-۹+۲=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۱۶$$

پس مرکز دایرهٔ دوم $O'(۳,۳)$ و شعاع اون هم $r'=۴$، پس:

$$OO'=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۳-۰)^۲}=۵$$

حالا مونده محور و محل OO'



یعنی مکان OO' در ناحیه ۲ و حالت ۲ پیش میاد یعنی مماس بیرون هستند.

سوالات منتخب:

۱- دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲y=۳$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(۰,-۳)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟ *(کنکور سراسری ۱۴۰۰ - خارج)*

۱) $x^۲+y^۲-۴x=۳$
۲) $x^۲+y^۲-۴y+۳=۰$
۳) $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰$
۴) $x^۲+y^۲+۴y+۳=۰$ ✓

(البته تو این تست فقط نقطه رو صدق می‌دادی کافی بود.)

۲- وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ و $x^۲+y^۲+۴x+۲y+۴=۰$ نسبت به هم چگونه است؟ *(آزمون دوپینگ ماز سال ۱۴۰۰)*

۱) متخارج
۲) متقاطع ✓
۳) مماس خارج
۴) متداخل

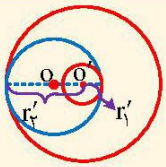
گروه آموزشی ماز

20 - نقطهٔ $O'(\alpha,۱)$ درون دایره c به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$ قرار دارد. مجموع مقادیر شعاع‌های دایره‌هایی به مرکز O' که با دایرهٔ c مماس درون هستند کدام است؟

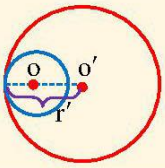
۱) ۶
۲) ۳
۳) ۸
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۹ تا ۱۴۲ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!



اگر نقطهٔ O' داخل دایرهٔ c باشه $(OO' < r)$، دو دایره به مرکز O' وجود داره که بر دایرهٔ c مماس درون است.
یکی به شعاع r'_1 و دیگری به شعاع r'_2.
که شعاع‌ها، ریشه‌های معادلهٔ $|r' - r| = OO'$ هستند و جمع آن‌ها برابر $2r$ است.
ولی اگر نقطهٔ O' خارج دایرهٔ c باشد $(OO' > r)$ تنها یک دایره به مرکز O' وجود دارد که بر دایرهٔ c مماس درون است. در واقع تو این حالت یکی از جواب‌های $|r - r'| = OO'$ منفیه که بدرد نمی‌خوره.



شعاع و مرکز دایرهٔ c را مشخص می‌کنیم:

$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 4$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow$ مرکز و شعاع برابر ۳ است $(-1, 2)$

چون دو دایره قراره مماس درون باشند، پس: $OO' = |r' - r| = |r' - 3|$

درسته که ما OO' رو نداریم ولی حتماً یه عددی مثبته و چون O' داخل دایرهٔ c است پس هر دو مقداری که برای r' بدست میاد مثبت و قابل قبولند. از طرفی معادلهٔ $|x-3| = k$ (به شرط $k > 0$) دارای دو ریشه است که جمع اونا ۲ برابر محور تقارنه $y = |x-3|$ (یعنی $x = 3$) است. پس:

مجموع مقادیر r' برابر $\underbrace{2 \times 3 = 6}_{2r = r'_1 + r'_2}$ است.

سوالات منتخب:

۱- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟ (سراسری تجربی ۸۰)

۱) مماس خارجی ۲) مماس داخلی ✔ ۳) متقاطع در دو نقطه ۴) یکی خارج دیگری

۲- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) مماس خارج ✔ ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

۳- شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳- خارج از کشور)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ✔ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

۴- دایره‌ای با مرکز $O(-3, 1)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ مماس خارج است. شعاع این دایره چند است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۳ ✔ ۴) ۴

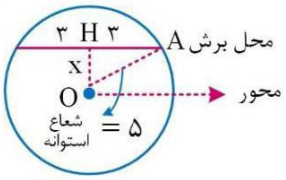
21 - ارتفاع و شعاع قاعده استوانه‌ای توپر به ترتیب ۶ و ۵ هستند. اگر استوانه را با صفحه‌ای به موازات محور استوانه برش دهیم، مقطع حاصل مربع خواهد شد. فاصله صفحه برش تا محور استوانه چه عددی است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) وقتی صفحه‌ای عمود بر قاعده استوانه را برش می‌دهد یک مستطیل یا مربع را به عنوان مقطع جدا می‌کند.

وقتی با صفحه‌ای، استوانه را برش می‌دهیم در واقع صفحه وتری از دایره جدا می‌کند.



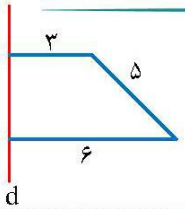
شعاع دایره ۵ است چون ارتفاع استوانه ۶ است، پس باید طول وتر هم ۶ باشد پس $AH = ۳$، به همین ترتیب $OH = ۴$. پس کافی است صفحه برش تا مرکز استوانه به فاصله ۴ باشد.

سوالات منتخب:

نیم‌کره‌ای به شعاع ۱۳ با صفحه‌ای به موازات قاعده آن به فاصله ۱۲ از سطح افقی آن را برش می‌دهد، مساحت مقطع حاصل کدام است؟

۱) ۱۶π ۲) ۲۰π ۳) ۲۵π ✓ ۴) ۲۷π

گروه آموزشی ماز

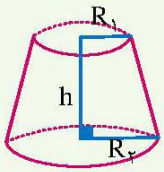


22 - ذوزنقه در شکل روبه‌رو را حول خط d دوران دهیم، حجم پدید آمده چه عددی است؟

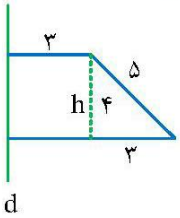
۱) ۷۲π
۲) ۸۴π
۳) ۸۰π
۴) ۷۶π

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) حجم مخروط ناقص از رابطه $V = \frac{\pi}{۳}(R_۱^۲ + R_۲^۲ + R_۱R_۲)h$ بدست می‌آید.



شکل را حول خط d دوران دهیم یک مخروط ناقص بدست می‌آید به طوری که شعاع آن ۳ و ۶ خواهد بود و ارتفاع آن $h = ۴$ است.



$$V = \frac{\pi}{۳} \times ۴(۹ + ۳۶ + ۱۸) = \frac{۴\pi}{۳}(۶۳)$$

$$V = ۴\pi \times ۲۱ = ۸۴\pi$$

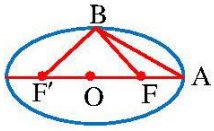
سوالات منتخب:

یک ۶ ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ را حول قطر بزرگ آن دوران می‌دهیم. حجم بدست آمده چه عددی است؟

۱) ۴π ۲) ۶π ۳) ۸π ✓ ۴) ۱۰π

www.biomaze.ir

23 - خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث ABF' چند برابر مساحت مثلث ABF است؟



۱) ۳
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) ۴

www.mapedu.ir

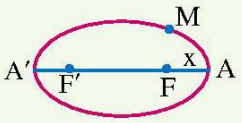
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) روابط زیر در بیضی برقرار است.

$x = AF = a - c \qquad FF' = ۲c$

$AF' = a + c \qquad e = \frac{c}{a} \qquad ۰ < e < ۱$

$AA' = ۲a \qquad MF + MF' = ۲a$



$$S_{BFA} = \frac{۱}{۲} \times FA \times OB = \frac{۱}{۲}(a-c) \times b$$

$$S_{BF'A} = \frac{۱}{۲} \times F'A \times OB = \frac{۱}{۲}(a+c) \times b$$

$$\frac{S_{BF'A}}{S_{BFA}} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{۱+\frac{c}{a}}{۱-\frac{c}{a}} = \frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}} = \frac{\frac{۸}{۵}}{\frac{۲}{۵}} = ۴$$

سوالات منتخب:

اگر $F(۳,۱)$ و $F'(-۱,۱)$ کانون‌های بیضی و $(۳,۴)$ نقطه‌ای روی بیضی باشد. طول قطر بزرگ بیضی چه عددی است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ✓ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گروه آموزشی ماز

24 - کانون‌های بیضی $(۱,۴)$ و $(-۳,۴)$ هستند، اگر خروج از مرکز بیضی ۰/۸ باشد، جمع فواصل هر نقطه روی بیضی تا دو کانون چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته ۱) $FF' = ۲c$ فاصله دو کانون بیضی را فاصله کانونی می‌گوییم.

نکته ۲) $e = \frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی است.

نکته ۳) هر نقطه مثل M روی بیضی در شرط $MF + MF' = ۲a$ صدق می‌کند.

با توجه به مختصات کانون‌ها: $FF' = ۴ \Rightarrow ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰} = \frac{۲}{a} \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

اگر M یک نقطه دلخواه روی بیضی باشد و F و F' کانون‌های بیضی باشند $MF + MF' = ۲a$، پس: $MF + MF' = ۵$

سوالات منتخب:

مختصات دو سر قطر کوچک بیضی $(-۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ هستند اگر بیضی از نقطه $(۳,۱)$ عبور کند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ✓

www.biomaze.ir

25 - هرگاه دو دایره $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۴y = ۲۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۴y + k = ۰$ مماس داخلی باشند، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) دو دایره به شرطی بر هم مماس داخلی هستند که $O_۱O_۲ = |R_۱ - R_۲|$، در واقع فاصله ۲ مرکز برابر اختلاف شعاع‌های دایره باشند.

www.mapedu.ir

دو دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۶x-۴y=۲۳ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۲)^۲=۲۳+۹+۴$$

$$(x-۳)^۲+(y-۲)^۲=۳۶$$

$$x^۲+y^۲+۴y+k=۰ \Rightarrow x^۲+(y+۲)^۲=-k+۴$$

$$O_۱\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right. \quad , \quad R_۱=۶$$

$$O_۲\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right. \quad , \quad R_۲=\sqrt{۴-k} \qquad \Rightarrow O_۱O_۲=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

چون قرار است دو دایره مماس داخل باشند، پس:

$$O_۱O_۲=|R_۲-R_۱| \Rightarrow ۵=\left|\sqrt{۴-k}-۶\right|=\sqrt{۴-k}=۱۱ \Rightarrow ۴-k=۱۲۱ \Rightarrow k=-۱۱۷$$

$$۵=۶-\sqrt{۴-k} \Rightarrow \sqrt{۴-k}=۱ \Rightarrow k=۳$$

با توجه به گزینه‌ها $k=۳$ را انتخاب می‌کنیم.

سوالات منتخب:

معادله وتر مشترک دو دایره با مرکز $O_۱(-۱,۲)$ و $O_۲(۲,۱)$ و شعاع برابر ۲ کدام است؟

۱) $x=۲y$ ۲) $y=۳x$ ✓ ۳) $۳y=۲x$ ۴) $۲y=۳x$

گروه آموزشی ماز

26 - اگر دایره‌ای محور عرض‌ها را در نقاطی با عرض ۱- و ۳ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول ۱ قطع کند، شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) از هر سه نقطه که روی خط راست نباشند فقط یک دایره عبور می‌کند. مرکز دایره روی تلاقی عمودمنصف نقاط می‌باشد.

دایره از سه نقطه $C\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ و $A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$ می‌گذرد، پس:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

$$A: ۱-b+c=۰ \Rightarrow c=b-۱$$

$$B: ۹+۳b+c=۰ \Rightarrow ۹+۳b+b-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=-۲ \\ c=-۳ \end{cases}$$

$$C: ۱+a+c=۰ \Rightarrow a=۲$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y-۳=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

$$R=\sqrt{۵}$$

سوالات منتخب:

$A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ نقاطی از یک دایره هستند که $y=x-۲$ یکی از قطرهای آن است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۵}$ ✓

27 - به ازاء کدام مقدار a دایره $x^۲+y^۲-۴x+۶y+a=۰$ از خط $۳x+۴y+۲۶=۰$ وتری به اندازه ۶ جدا می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

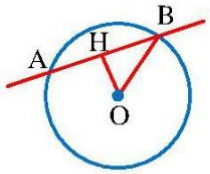
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته) فاصله نقطه $A\left|\begin{matrix}x_۰\\y_۰\end{matrix}\right.$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad \text{و} \quad \text{طول وتر}=\sqrt{R^۲-OH^۲}$$

OH : فاصله مرکز تا وتر است.

AB وتر است وقتی $AB=۶$، پس:



$HB=۳$

$OB=R$

$OH=$ فاصله مرکز تا وتر

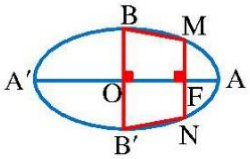
مرکز دایره $C\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.$ است $\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۹+۴-a$

$$OH=\frac{|۶-۱۲+۲۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴\Rightarrow R=\sqrt{OH^۲+HB^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۳-a}=۵\Rightarrow a=-۱۲$$

www.biomaze.ir

28 - در بیضی مقابل، $AA'=۱۰$ و $e=\frac{۳}{۵}$ است. اگر F کانون بیضی باشد، مساحت ذوزنقه $MNB'B$ چه عددی است؟



۱) ۲۱/۶
۲) ۲۳/۴
۳) ۲۰/۴
۴) ۱۸/۲

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته ۱) فاصله کانونی $FF'=۲c$ قطر بزرگ $AA'=۲a$ قطر کوچک $BB'=۲b$

$OF=c$ وتر کانونی $=MN=\frac{۲b^۲}{a}$

نکته ۲) اگر خطی بر محور بیضی در کانون عمود شود و بیضی را در M و N قطع کند، پاره‌خط MN را وتر کانونی می‌گوییم و $MN=\frac{۲b^۲}{a}$.

$$\left.\begin{matrix}AA'=۱۰\Rightarrow a=۵\\ e=\frac{c}{a}=\frac{c}{۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow c=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲\Rightarrow b=۴$$

$$\text{ذوزنقه}\ S=\frac{۲b+\frac{۲b^۲}{a}}{۲}\times c=\frac{۸+\frac{۳۲}{۵}}{۲}\times ۳$$

$$S=\frac{۷۲}{۱۰}\times ۳=۷/۲\times ۳=۲۱/۶$$

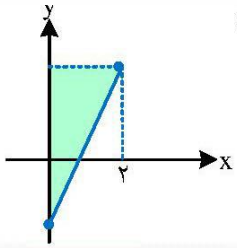
سوالات منتخب:

اگر اندازه قطرهای بیضی ۱۸ و ۱۲ باشد، اندازه وتر کانونی چه عددی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸ ✓

www.mapedu.ir

29 - خط $y=3x-2$ را در دامنه $[0,2]$ در نظر بگیرید. آن را حول محور عرضها دوران دهیم.کدام حجم بدست می‌آید؟



۱) $\frac{16\pi}{3}$

۲) 12π

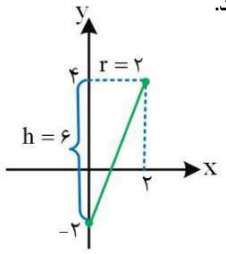
۳) 8π

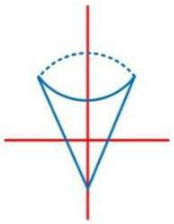
۴) $\frac{32\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ ساده)

نکته) حجم مخروط $V=\frac{\pi}{3}r^2h$ است که r شعاع قاعده و h ارتفاع مخروط است.

معادله خط داده شده $y=3x-2$ است، از دوران حول محور عرض‌ها یک مخروط پدید می‌آید بطوری که $h=6$ و $r=2$ باشد.





شعاع قاعده $r=2$ و ارتفاع آن $h=6$ است.

$V=\frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\times 4\times 6=8\pi$

سوالات منتخب:

مثلث متساوی‌الساقین با ساق ۵ و اندازه قاعده ۸ را حول قاعده آن دوران می‌دهیم. حجم بدست آمده چه عددی است؟

۱) 24π ✓ ۲) 18π ۳) 27π ۴) 36π

30 - خط به معادلهٔ $2x-3y=6$ با محورهای مختصات تشکیل مثلث قائم‌الزاویه می‌دهد. اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر این مثلث، چند برابر $\sqrt{13}$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ٦ و ۷ ـ متوسط)

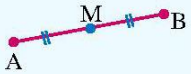
نکته۱:

برای یافتن محل تلاقی هر خط با محور xها، قرار می‌دهیم $y=0$ و برای یافتن محل تلاقی هر خط با محور yها، قرار می‌دهیم $x=0$.

نکته۲:

مختصات وسط پاره‌خط AB با رئوس $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ عبارتست از:

$M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$



نکته۳:

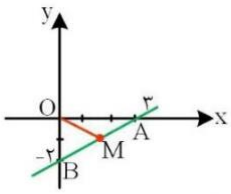
فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از مبدأ مختصات، برابر است با $OA=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

پاسخ تشریحی:

ابتدا محل تلاقی خط $۲x-۳y=۶$ با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم:

$x=۰: ۲(۰)-۳y=۶ \rightarrow y=-۲ \rightarrow B(۰,-۲)$

$y=۰: ۲x-۳(۰)=۶ \rightarrow x=۳ \rightarrow A(۳,۰)$



مختصات M وسط AB عبارتست از:

$M(\frac{۰+۳}{۲},\frac{-۲+۰}{۲})=(\frac{۳}{۲},-۱)$

و اندازهٔ میانهٔ OM برابر است با:

$OM=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۱}=\sqrt{\frac{۱۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

گروه آموزشی ماز

31 - دو ضلع مستطیلی روی خطوط $۴x-۳y-۵=۰$ و $۳x+۴y-۱۰=۰$ قرار دارند. نقطهٔ $A(-۲,۱)$ یکی از رئوس مستطیل است. مساحت این مستطیل، کدام است؟

۱) ۶/۷۸ ۲) ۸/۶۷ ۳) ۷/۶۸ ۴) ۷/۸۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳ و ۸ ـ دشوار)

نکته۱:

شیب خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر $\frac{-a}{b}$ است.

نکته۲:

دو خط d و d' با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $mm'=-۱$ و این یعنی شیب‌های عکس و قرینه داشته باشند.

نکته۳:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

پاسخ تشریحی:

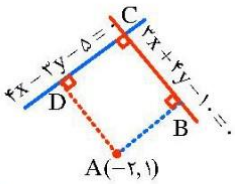
اولاً دو خط بر هم عمودند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۴x-۳y-۵=۰: m=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳} \\ ۳x+۴y-۱۰=۰: m'=\frac{-۳}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow mm'=-۱$$

ثانیاً نقطهٔ $A(-۲,۱)$ روی هیچ‌یک از خطوط قرار ندارد، زیرا مختصاتش در هیچ‌یک صدق نمی‌کند. پس مطابق شکل، داریم:

$AB=\frac{|-۶+۴-۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۲}{۵}$

$AD=\frac{|-۸-۳-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۶}{۵}$



و در نهایت مساحت مستطیل، برابر است با:

$S_{ABCD}=AB\times AD=\frac{۱۲}{۵}\times\frac{۱۶}{۵}=\frac{۱۹۲}{۲۵}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۷۶۸}{۱۰۰}=۷/۶۸$

32 - دو ضلع یک مربع با مساحت $\frac{۱۶}{۱۳}$ روی دو خط موازی $ax-۳y=b$ و $۹y=۶x+۱۱$ قرار دارند. کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۳}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۲ و ۳ و ۹ ـ دشوار)

نکته۱:

شیب خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر $\frac{-a}{b}$ است.

نکته۲:

دو خط d و d' با شیب‌های m و m' موازی‌اند، اگر و فقط اگر $m=m'$.

نکته۳:

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

پاسخ تشریحی:

اولاً چون دو خط موازی‌اند، پس شیب‌های برابر دارند.

$$\left.\begin{array}{l} ax-۳y-b=۰: m=\frac{-a}{-۳}=\frac{a}{۳} \\ ۶x-۹y+۱۱=۰: m=\frac{-۶}{-۹}=\frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{۳}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۲$$

ثانیاً فاصله دو خط از هم برابر است با طول ضلع مربع:

$$۲x-۳y-b=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۶x-۹y-۳b=۰,\ ۶x-۹y+۱۱=۰$$

$$\text{ضلع مربع}=\frac{|-۳b-۱۱|}{\sqrt{۳۶+۸۱}}=\frac{|۳b+۱۱|}{\sqrt{\underbrace{۱۱۷}_{۹\times ۱۳}}}=\frac{|۳b+۱۱|}{۳\sqrt{۱۳}}$$

ثالثاً مساحت مربع برابر $\frac{۱۶}{۱۳}$ است. پس:

$$\frac{(۳b+۱۱)^۲}{۹\times ۱۳}=\frac{۱۶}{۱۳} \rightarrow (۳b+۱۱)^۲=۱۴۴ \rightarrow ۳b+۱۱=\pm ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳b+۱۱=۱۲ \rightarrow b=\frac{۱}{۳} \\ ۳b+۱۱=-۱۲ \rightarrow b=\frac{-۲۳}{۳} \end{cases} \xrightarrow{a=۲} \begin{cases} a+b=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳} \\ a+b=۲-\frac{۲۳}{۳}=\frac{-۱۷}{۳} \checkmark \end{cases}$$

33 - معادلهٔ سه ضلع مثلثی به صورت $\begin{cases} AB: x+۲y=۳ \\ AC: y=۲x-۱ \\ BC: x+y=۴ \end{cases}$ است. نسبت میانهٔ **AM** به ارتفاع **AH** کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ـ صفحه ۲ تا ۱۰ ـ دشوار)

نکته۱:

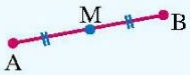
برای یافتن نقطهٔ تلاقی دو خط، دستگاه دو معادله و دو مجهول معادلات دو خط را حل می‌کنیم تا مقادیر x و y به دست آیند. نقطهٔ (x, y) نقطهٔ تقاطع دو خط است.

نکته۲:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

نکته۳:

مختصات وسط پاره‌خط AB با رئوس $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ عبارتست از: $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲}, \frac{y_۱+y_۲}{۲})$



نکته۴:

طول پاره‌خط AB به نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ عبارتست از: $AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} AB: x+۲y=۳ \\ AC: y=۲x-۱ \\ BC: x+y=۴ \end{cases}$$

ابتدا با حل دستگاه معادلات خطوط AB و AC، مختصات نقطهٔ A را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+۲y=۳ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۱)$$

اینک با محاسبهٔ فاصلهٔ رأس A از ضلع BC، اندازهٔ ارتفاع AH حاصل می‌شود:

$$A(۱,۱),\ BC: x+y-۴=۰$$

$$AH=\frac{|۱+۱-۴|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

هم‌اکنون با حل دستگاه معادلات خطوط AB و BC، مختصات نقطهٔ B و با حل دستگاه معادلات خطوط AC و BC، مختصات نقطهٔ C را بدست می‌آوریم تا بتوانیم مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را تعیین کنیم:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow B(5,-1) \quad \begin{cases} y=2x-1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$$

$$\Rightarrow M(\frac{5+\frac{5}{3}}{2},\frac{-1+\frac{7}{3}}{2})=(\frac{10}{3},\frac{2}{3})$$

و آن‌گاه اندازهٔ میانهٔ AM برابر است با:

$$AM=\sqrt{(1-\frac{10}{3})^2+(1-\frac{2}{3})^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{50}{9}}=\frac{5}{3}\sqrt{2}$$

و در نهایت نسبت طول میانهٔ AM به طول ارتفاع AH برابر $\frac{5}{3}$ است.

گروه آموزشی ماز

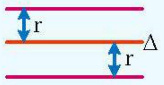
34 - بر روی محیط مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$، اگر تعداد نقاطی که از قطر BD به فاصلهٔ ۱/۵ هستند را m و تعداد نقاطی که از قطر AC به فاصلهٔ ۲ هستند را n در نظر بگیریم، مقدار m+n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۶ ـ متوسط)

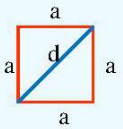
نکته:

مجموعهٔ نقاطی که از خط مفروض Δ به فاصلهٔ r هستند، دو خط موازی است در طرفین Δ و به موازات Δ و به فاصلهٔ r از Δ.



یادآوری:

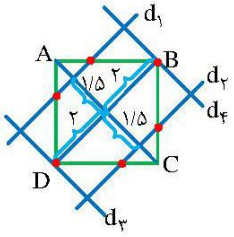
اندازهٔ قطر مربع به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ است. $d=a\sqrt{2}$



پاسخ تشریحی:

اولاً طول قطر مربع برابر ۴ است، زیرا:

$$AC=BD=(2\sqrt{2})(\sqrt{2})=4$$



ثانیاً مجموعه نقاطی که از قطر BD به فاصلهٔ ۱/۵ واحد باشند، دو خط d_1 و d_2 هستند که مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

ثالثاً مجموعه نقاطی که از قطر AC به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دو خط d_3 و d_4 هستند که از ۲ رأس B و D می‌گذرند.

بنابراین $m=4$ و $n=2$ است و داریم:

$$m+n=4+2=6$$

گروه آموزشی ماز

35 - در صفحهٔ مثلث ABC چند نقطه می‌توان یافت که از دو سر ضلع BC به یک فاصله بوده و از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها نیز به یک فاصله باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۲۷ تا ۲۹ ـ متوسط)

نکته۱:

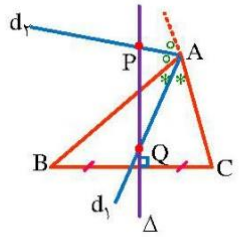
مجموعه نقاطی که از دو سر یک پاره‌خط (یا دو نقطه در صفحه) به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارند.

نکته۲:

مجموعه نقاطی که از دو ضلع یک زاویه (یا دو خط متقاطع) به یک فاصله باشند، روی نیمساز آن زاویه قرار دارند.

پاسخ تشریحی:

مجموعه نقاطی که از دو سر ضلع BC به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف ضلع BC (خط Δ) قرار دارند و مجموعهٔ نقاطی که از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشند، روی نیمساز داخلی یا نیمساز خارجی رأس A (خطوط d_1 و d_2) قرار دارند.



و همانگونه که مشاهده می‌کنید، مطابق شکل، دو خط d_1 و d_2، خط Δ را در دو نقطهٔ P و Q قطع کرده‌اند و ۲ نقطه با شرایط مسئله وجود دارد.

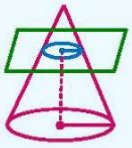
36 - مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۱۰ را با صفحه‌ای به موازات صفحهٔ قاعده و به فاصلهٔ ۶ واحد از قاعده قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده چند برابر π است؟

۱) $\frac{۲۶۵}{۷۵}$ ۲) $\frac{۲۵۶}{۵۷}$ ۳) $\frac{۲۵۶}{۷۵}$ ۴) $\frac{۲۶۵}{۵۷}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۶ ـ دشوار)

نکته۱:

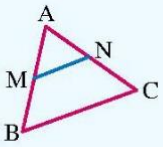
سطح مقطع هر صفحه موازی با قاعدهٔ مخروط، یک دایره است که در قسمت بالایی، یک مخروط کوچک‌تر ایجاد می‌کند.



نکته۲:

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث، داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

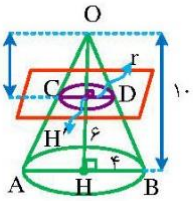


یادآوری

حجم مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل مقابل، در مثلث OBH به کمک تعمیم قضیهٔ تالس، داریم



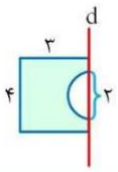
$$\frac{DH'}{BH}=\frac{OH'}{OH}\Rightarrow\frac{r}{۴}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow r=\frac{۱۶}{۱۰}=\frac{۸}{۵}$$

پس حجم مخروط جدا شده برابر است با:

$$V_{OCD}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۳}\times\pi\times\frac{۶۴}{۲۵}\times ۴=\frac{۲۵۶}{۷۵}\pi$$

گروه آموزشی ماز

37- سطح محدود به مستطیل ۳×۴ و نیم‌دایره به قطر ۲ واحد، حول خط **d** دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چند برابر $\frac{\pi}{۳}$ است؟



۱) ۱۰۱
۲) ۱۰۲
۳) ۱۰۳
۴) ۱۰۴

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲۳ ـ متوسط)

نکته۱:

از دوران مستطیل حول طول و عرضش، یک استوانه پدید می‌آید.

نکته۲:

از دوران نیم‌دایره حول قطرش، یک کره پدید می‌آید.

یادآوری۱:

حجم استوانه به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $\pi r^{۲}h$.

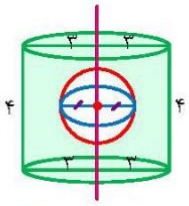
یادآوری۲:

حجم کره به شعاع R برابر است با: $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$.

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل، حجم حاصل از دوران، یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ است که به اندازهٔ یک کره به شعاع ۱، درون آن خالی است.

بنابراین، حجم حاصل از دوران برابر است با:



$$\text{حجم استوانه}-\text{حجم کره}=\pi(۳)^{۲}(۴)-\frac{۴}{۳}\pi(۱)^{۳}=۳۶\pi-\frac{۴}{۳}\pi=\frac{۱۰۴}{۳}\pi$$

گروه آموزشی ماز

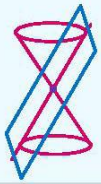
38 – صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس سطح مخروطی عبور می‌کند. سطح مقطع حاصل، از برخورد صفحه با مخروط کدام است؟

۱) سهمی ۲) دو خط متقاطع ۳) هذلولی ۴) یک خط

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۲٤ ـ ساده)

نکته:

اگر صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی بوده و از رأس سطح مخروطی عبور کند، سطح مقطع حاصل، یک خط است که این خط، یکی از مولدهای مخروط است.



پاسخ تشریحی:

با توجه به نکته و مطابق شکل، سطح مقطع حاصل یک خط است و گزینه ۴ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

39 – در یک بیضی، فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقاط بیضی، ۴ برابر فاصلهٔ همان کانون از نزدیک‌ترین نقاط آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳۱ ـ متوسط)

نکته۱:

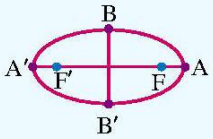
خروج از مرکز بیضی به طول قطر بزرگ $۲a$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ برابر است با $\frac{c}{a}$.

نکته۲:

فاصلهٔ هر کانون تا نزدیک‌ترین رأس بیضی برابر $a-c$ و تا دورترین رأس بیضی برابر $a+c$ است.

$FA = a - c$

$FA' = a + c$



پاسخ تشریحی:

با توجه به نکات ارائه شده داریم:

$a+c = ۴(a-c) \rightarrow a+c = ۴a - ۴c \rightarrow ۵c = ۳a \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$

گروه آموزشی ماز

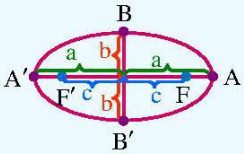
40 – در یک بیضی، طول قطر کوچک ۸ و فاصلهٔ کانونی برابر ۱۲ است. اگر F و F′ کانون‌های بیضی، M نقطهٔ دلخواهی روی بیضی و محیط مثلث MFF′ برابر P باشد، مقدار $P-۴\sqrt{۱۳}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۹ و ۱۳۰ ـ متوسط)

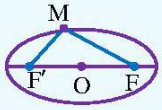
نکته۱:

در هر بیضی با طول قطر بزرگ $۲a$، طول قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$، رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.



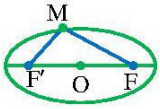
نکته۲:

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون، برابر است با طول قطر بزرگ بیضی. $MF + MF' = ۲a$



پاسخ تشریحی:

به کمک اطلاعات مساله، داریم:



$$۲b = ۸ \to b = ۴$$

$$۲c = ۱۲ \to c = ۶$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲ \to a = ۲\sqrt{۱۳}$$

محیط مثلث MFF' برابر است با:

$$P = \underbrace{MF + MF'}_{۲a} + \underbrace{FF'}_{۲c} = ۲a + ۲c = ۴\sqrt{۱۳} + ۱۲$$

بنابراین مقدار $P - ۴\sqrt{۱۳}$ برابر ۱۲ است.

گروه آموزشی ماز

41 – به ازای کدام مقدار m، خط $۴x - ۲y + m = ۰$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۲y = ۰$ مماس است؟

۱) ۰ یا ۱۰ ۲) ۰ یا ۲۰ ۳) ۱− یا ۱۰ ۴) ۱ یا ۲۰

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ ـ دشوار)

نکته:

مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره به معادلهٔ گستردهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ عبارتند از:

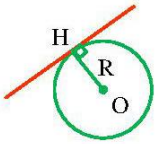
مرکز $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، فاصلهٔ مرکز دایره، تا خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. پس مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ + ۴x - ۲y = ۰$$

$$O(-۲, ۱)\ ,\ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۴ - ۰} = \sqrt{۵}$$



به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، داریم:

$$۴x - ۲y + m = ۰\ ,\ O(-۲, ۱)$$

$$\sqrt{۵} = \frac{|-۸ - ۲ + m|}{\sqrt{۱۶ + ۴}} \to \sqrt{۵} = \frac{|m - ۱۰|}{۲\sqrt{۵}} \to |m - ۱۰| = ۱۰ \to m - ۱۰ = \pm ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} m - ۱۰ = ۱۰ \\ m - ۱۰ = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲۰ \\ m = ۰ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

42 – معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن $(-۱, -۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰$ مماس داخل باشد، کدام است؟

۱) $(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۹$ ۲) $(x + ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۹$

۳) $(x + ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۸۱$ ۴) $(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۸۱$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ـ صفحه ۱۴۲ ـ دشوار)

نکته۱:

مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره به معادلهٔ گستردهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ عبارتند از:

مرکز $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$

نکته۲:

در دو دایرهٔ مماس داخل $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با خط‌المرکزین $d = OO'$ داریم: $d = |R - R'|$

نکته۳:

معادلهٔ استاندارد دایره به مرکز (α, β) و شعاع R عبارتست از: $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲$

پاسخ تشریحی:

ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$O'(۲,۳)\ ,\ R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶+۱۲}=۴$$

طول خط‌المرکزین دو دایره، برابر است با:

$$d=OO'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

و اینک با توجه به مماس داخل بودن دو دایره، داریم:

$$d=|R-R'|\rightarrow ۵=|R-۴|\rightarrow R-۴=\pm ۵\rightarrow \begin{cases} R=-۱ \times \\ R=۹ \end{cases}$$

و در نهایت، معادلهٔ دایره، عبارتست از:

$$(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۸۱$$

43- صفحه‌ای شامل رأس یک سطح مخروطی است. سطح مقطع صفحه با این سطح کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) یک نقطه ۲) یک خط راست ۳) دو خط موازی ۴) دو خط متقاطع

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۲۶ و ۱۲۷ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

اگر صفحه فقط شامل رأس سطح مخروطی باشد، سطح مقطع، یک نقطه خواهد بود. اگر صفحه بر سطح مخروطی مماس باشد، شکل حاصل یک خط راست خواهد بود و اگر صفحه هر دو سطح را قطع کند، سطح مقطع دو خط راست متقاطع خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

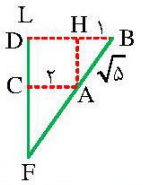
44- فاصله دو سر پاره‌خط AB به طول $\sqrt{۵}$ تا خط L برابر ۲ و ۳ است. حجم شکل حاصل از دوران پاره‌خط AB حول خط L کدام است؟

۱) $\frac{۳۸\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳۷\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴۲\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۴۱\pi}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۲۲ و ۱۲۳ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

از دوران پاره‌خط AB حول خط L یک مخروط ناقص حاصل خواهد شد.



$\overset{\triangle}{HBA}: AH = \sqrt{۵-۱} = ۲ \Rightarrow DC = ۲$

رابطه تشابه: $\frac{FC}{FD} = \frac{AC}{DB} \Rightarrow \frac{FC}{FC+۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳FC = ۲FC + ۴ \Rightarrow FC = ۴ \Rightarrow FD = ۴+۲ = ۶$

حجم شکل $= V_۱ - V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲(۴) = \frac{۱}{۳}\pi(۵۴-۱۶) = \frac{۳۸\pi}{۳}$

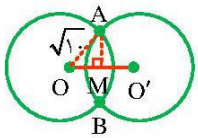
گروه آموزشی ماز

45- دو دایره با شعاع برابر $\sqrt{۱۰}$ یکدیگر را در نقاط A(۲,۳) و B(۴,۱) قطع می‌کنند. مجموع طول و عرض مرکز یکی از دایره‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۶ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:



$m_{AB} = \frac{۳-۱}{۲-۴} = -۱ \Rightarrow m_{OO'} = ۱$

(وسط پاره‌خط AB) $M(\frac{۴+۲}{۲}, \frac{۱+۳}{۲}) \Rightarrow M(۳,۲)$

معادله خط OO': $y - ۲ = ۱(x-۳) \Rightarrow y = x - ۱$

پس می‌توان مختصات نقطه O را به فرم $(\alpha, \alpha-۱)$ در نظر گرفت. از طرفی:

$AM = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}\ ,\ OM = \sqrt{۱۰-۲} = \sqrt{۸} \Rightarrow OM = \sqrt{(\alpha-۳)^۲ + (\alpha-۳)^۲} = \sqrt{۸}$

$۲(\alpha-۳)^۲ = ۸ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۵ \rightarrow O(۵,۴) \rightarrow ۵+۴ = ۹ \\ \alpha = ۱ \end{cases}$

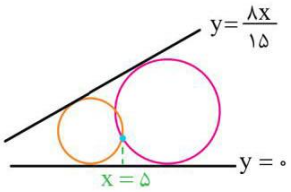
گروه آموزشی ماز

46- دو دایره وجود دارد که بر خطوط $y=\frac{۸}{۱۵}x$ و $y=۰$ مماس بوده و از نقطه $A(۵,۱)$ عبور می‌کنند. مجموع شعاع این دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۸}$ ۲) $\frac{۱۷}{۸}$ ۳) $\frac{۲۳}{۸}$ ۴) $\frac{۲۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۳۸ تا ۱٤۱ _ دشوار)

پاسخ تشریحی:



فرض کنید مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha,\beta)$ باشد:

توجه: دایره در ناحیه اول قرار دارد، پس $\alpha\beta>۰$

$$y=\frac{۸}{۱۵}x \Rightarrow ۸x-۱۵y=۰\ ,\ OH=\frac{|۸\alpha-۱۵\beta|}{\sqrt{۶۴+۲۲۵}}=\frac{|۸\alpha-۱۵\beta|}{۱۷}=r$$

$$y=۰\ ,\ OH'=\beta=r$$

$$\Rightarrow \frac{|۸\alpha-۱۵\beta|}{۱۷}=\beta \Rightarrow ۸\alpha-۱۵\beta=\pm ۱۷\beta \Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha=-۲\beta \Rightarrow \alpha=\frac{-۱}{۴}\beta \ \times \\ ۸\alpha=۳۲\beta \Rightarrow \alpha=۴\beta \end{cases}$$

معادله دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (x-۴\beta)^۲+(y-\beta)^۲=\beta^۲$

$A(۵,۱)\in$ دایره $\Rightarrow (۵-۴\beta)^۲+(۱-\beta)^۲=\beta^۲ \Rightarrow ۱۶\beta^۲-۴۲\beta+۲۶=۰ \Rightarrow \beta_۱+\beta_۲=\frac{۴۲}{۱۶}=\frac{۲۱}{۸}$

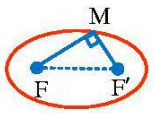
گروه آموزشی ماز

47- نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' و با اقطار بزرگ و کوچک به طول‌های ۱۰ و ۶ قرار دارد. اگر زاویهٔ $F\hat{M}F'$ برابر ۹۰° باشد، فاصله M از کانون دورتر کدام است؟

۱) $۴+\sqrt{۶}$ ۲) $۵+\sqrt{۷}$ ۳) $۴+\sqrt{۷}$ ۴) $۵+\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۰ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:



$$MF+MF'=۲a=۱۰\ ,\ MF=x \Rightarrow MF'=۱۰-x$$

$$a=۵\ ,\ b=۳ \Rightarrow c=\sqrt{۲۵-۹}=۴ \Rightarrow FF'=۲c=۸$$

$$M\overset{\triangle}{F}F':\ x^۲+(۱۰-x)^۲=۶۴ \Rightarrow x^۲+x^۲-۲۰x+۱۰۰=۶۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۸=۰ \Rightarrow x=۵\pm\sqrt{۷} \Rightarrow$$ مقدار بزرگ‌تر $=۵+\sqrt{۷}$

گروه آموزشی ماز

48- به ازای کدام مقدار زیر برای a، رابطه $x^۲+y^۲+ax-۲ay+\frac{۵a}{۴}=۰$، معادله گسترده یک دایره نیست؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ _ صفحه ۱۳۷ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c} \Rightarrow a^۲+b^۲-۴c>۰ \Rightarrow a^۲+۴a^۲-۵a>۰ \Rightarrow ۵a^۲-۵a>۰ \Rightarrow ۵a(a-۱)>۰ \Rightarrow a>۱$$ یا $a<۰$

پس، پاسخ گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز

49- طول قطر بزرگ بیضی با کانون‌های $F(1-\sqrt{5},0)$ و $F'(1+\sqrt{5},0)$، برابر ۶ است و خط $y=mx+n$ $(m<0,n>0)$، اقطار بیضی را روی محیط بیضی قطع می‌کند. $m+2n$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) 2 ۴) $\frac{14}{3}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۰ _ دشوار)

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم $O(h,k)$ مختصات مرکز بیضی باشد:

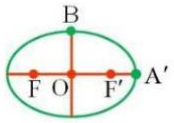
$$2a=6 \Rightarrow a=3\ ,\ k=0$$

$$\begin{cases} h+c=1+\sqrt{5} \\ h-c=1-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow h=1\ ,\ c=\sqrt{5} \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-5}=2$$

با توجه به این‌که کانون‌ها هم‌عرض هستند، نتیجه می‌گیریم که بیضی افقی است و با توجه به علامت‌های m و n نتیجه می‌گیریم که خط $y=mx+n$، از نقاط B و A' عبور می‌کند.

$$B\left|\begin{matrix} h \\ k+b \end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix} 1 \\ 0+2 \end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right. \in y=mx+n$$

$$A'\left|\begin{matrix} h+a \\ k \end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix} 1+3 \\ 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}\right. \in y=mx+n$$



$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=2 \\ 4m+n=0 \end{cases} \Rightarrow m=-\frac{2}{3}\ ,\ n=\frac{8}{3} \Rightarrow m+2n=-\frac{2}{3}+\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$$

گروه آموزشی ماز

50- کدام نقطه زیر، داخل دایرهٔ $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ قرار دارد؟

۱) $(1,-1)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(-1,1)$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ _ صفحه ۱٤۲ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

مرکز دایره $\Rightarrow O(-\frac{6}{2},+\frac{2}{2}) \Rightarrow O(-3,+1)\ ,\ r=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4(1)}=3$

$A(-1,1) \Rightarrow OA=\sqrt{4+0}=2 \Rightarrow OA<r$ داخل دایره قرار دارد. $A(-1,1)$

روش سریع‌تر: مختصات نقطه را در رابطه $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ قرار می‌دهیم. اگر عدد به دست آمده منفی باشد، نقطه داخل دایره قرار دارد.

$x^2+y^2+6x-2y+1 \xrightarrow{x=-1,y=1} 1+1-6-2+1<0$ بنابراین پاسخ گزینه ۴ است.

گروه آموزشی ماز

51- خطوط $x=-2$، $x=4$، $y=-1$ و $y=3$، بر یک بیضی مماس هستند. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

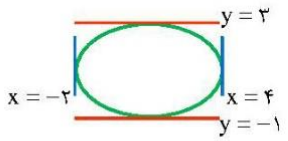
۱) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۱ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} 2a=4-(-2)=6 \Rightarrow a=3 \\ 2b=3-(-1)=4 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



گروه آموزشی ماز

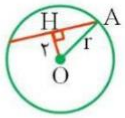
52- دایره‌ای به معادله $x^2+y^2-2x-4y+a=0$، روی خط $3x-4y+15=0$، وتری به طول $2\sqrt{5}$ جدا می‌کند، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) -6 ۴) 6

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \Rightarrow O(1,2)\ ,\ 3x-4y+15=0 \Rightarrow OH=\frac{|3-8+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2\ ,\ AH=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$



$$r=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{4+5}=3$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4a}=3 \Rightarrow 20-4a=36 \Rightarrow a=-4$$

گروه آموزشی ماز

53- چند نقطه روی خط $y=2x-a\ ,\ (a\neq-\frac{9}{4})$ وجود دارد که از دو نقطه $A(1,\frac{1}{2})$ و $B(-2,2)$ به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۲۶ تا ۲۹ ـ متوسط)

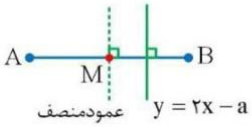
پاسخ تشریحی:

شیب خط AB، برابر $-\frac{1}{2}$ است.

$$m_{AB}=\frac{2-\frac{1}{2}}{-2-1}=-\frac{1}{2}$$

پس خط موردنظر بر پاره‌خط AB عمود است و از وسط پاره‌خط AB نمی‌گذرد:

$$M(\frac{1-2}{2},\frac{\frac{1}{2}+2}{2}) \Rightarrow A(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}) \not\in y=2x-a\ ,\ (a\neq-\frac{9}{4})$$



پس، پاسخ گزینه ۱ است.

گروه آموزشی ماز

54- یک استوانه با ارتفاع ۲ و حجم $V=۳۲\pi$ با صفحه‌ای عمود بر قاعده برش داده می‌شود. اگر مقطع برش خورده مربع باشد، فاصله صفحه تا محور عمودی استوانه چه عددی است؟

۱) ۲) ۳) ۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲٤ و ۱۲۵ ـ متوسط)

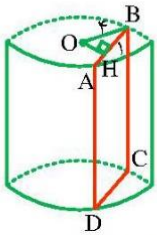
پاسخ تشریحی:

چهارضلعی ABCD مربع است. چون $AD=h$، پس $AD=۲$، بنابراین باید $AB=۲$.

اما

$$V=\pi r^۲ h \Rightarrow ۳۲\pi=\pi\times r^۲\times ۲ \Rightarrow r=۴$$

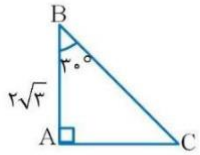
$$OH^۲+HB^۲=OB^۲ \Rightarrow OH^۲+۱=۱۶ \Rightarrow OH=\sqrt{۱۵}$$



یعنی فاصله صفحه برش تا محور قائم استوانه $\sqrt{۱۵}$ است.

گروه آموزشی ماز

55- مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را حول وتر آن دوران می‌دهیم، حجم شکل بدست آمده چه عددی است؟

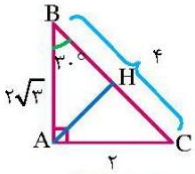


۱) π
۲) ۲π
۳) ۳π
۴) ۴π

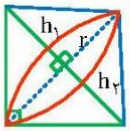
پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۵ ـ متوسط)

نکته:
وقتی یک مثلث قائم‌الزاویه، حول وتر دوران کند، دو مخروط به دست می‌آید، به طوری که شعاع مخروط، ارتفاع وارد بر وتر است و جمع ارتفاع دو مخروط همان وتر است.

پاسخ تشریحی:

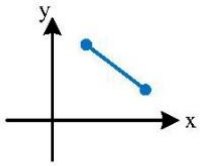


ارتفاع وارد بر وتر $AH\times ۴=۲\sqrt{۳}\times ۲ \Rightarrow AH=\sqrt{۳}$



$$V=V_۱+V_۲=\frac{\pi}{۳}(\sqrt{۳})^۲\times ۴=۴\pi$$

56- از دوران پاره‌خط **AB** حول محور عرض‌ها حجمی به دست می‌آید. مقدار آن حجم چه عددی است؟



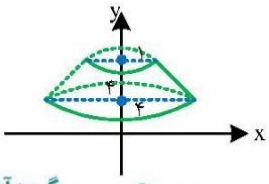
۱) ۲۸π
۲) ۱۶π
۳) ۳۲π
۴) ۲۵π

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۲ و ۱۲۳ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

دقت کنید وقتی پاره‌خط AB حول محور عرض‌ها دوران می‌کند، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود، به طوری که:

ارتفاع = ۴ شعاع قاعده کوچک = ۱ شعاع قاعده بزرگ = ۴



$$V=\frac{\pi}{۳}h(R_۱^۲+R_۲^۲+R_۱R_۲)=\frac{\pi}{۳}\times ۴(۱+۱۶+۴)=۲۸\pi$$

گروه آموزشی ماز

57- بیضی با کانون‌های $F'(۲,-۳)$ و $F(۲,۵)$ بر محور عرض‌ها مماس است. خروج از مرکز بیضی چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}$ ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون بیضی به صورت قائم است و بر محور عرض‌ها مماس است، پس مرکز بیضی $O(۲,۱)$ است و در نتیجه: $b=۲$

$FF'=۸\Rightarrow ۲c=۸\Rightarrow c=۴$

به این ترتیب: $a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۱۶+۴\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$

پس برای یافتن خروج از مرکز بیضی داریم: $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

گروه آموزشی ماز

58- طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۵}$ است. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، کم‌ترین فاصله نقاط روی بیضی تا یک کانون بیضی چه عددی است؟

۱) ۲) ۳) $\sqrt{۳}$ ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۱ ـ متوسط)

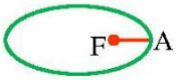
پاسخ تشریحی:

چون طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۵}$ است، پس: $۲b=۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}$

از طرفی، $e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}$. پس: $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}c$

$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow \frac{۹}{۴}c^۲=۲۰+c^۲\Rightarrow \frac{۵}{۴}c^۲=۲۰$

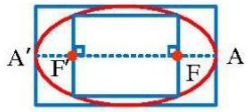
$c=۴, a=۶, b=۲\sqrt{۵}$



کم‌ترین فاصله نقاط روی بیضی تا کانون $a-c$ است، پس: $a-c=۲$

گروه آموزشی ماز

59- در شکل روبه‌رو، نسبت مساحت دو مستطیل $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است، به طوری که F و F' کانون‌های بیضی هستند. خروج از مرکز بیضی کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲)

۳) ۴) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۱ ـ دشوار)

نکته۱:

خطی که بر محور بیضی در کانون آن عمود می‌شود و بیضی را در نقاط M و N قطع می‌کند، وتر کانونی بیضی نام دارد و طول آن برابر است با: $MN = \frac{2b^2}{a}$

نکته۲:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow (\frac{b}{a})^2 = 1 - e^2$$

پاسخ تشریحی:

مساحت مستطیل بزرگ $= 2a \times 2b = 4ab$

مساحت مستطیل کوچک $= 2c \times \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2c}{a}$

از طرفی:

$$\frac{\frac{4b^2c}{a}}{4ab} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{4b^2c}{4a^2b} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{bc}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

با توجه به درسنامه:

$$\frac{b}{a}.\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sqrt{1-e^2}.e = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

60- اندازه وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 - 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 4x = 5$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳٤ تا ۱٤۱ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

ابتدا دو دایره را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow O\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \quad , \quad R_1 = 2$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right. \quad , \quad R_2 = 3$$

$$OO' = \sqrt{5} \ , \ R_2 - R_1 < \sqrt{5} < R_1 + R_2$$

پس دو دایره متقاطع هستند، لذا دارای وتر مشترک هستند.

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = x^2 + y^2 + 4x - 5 \Rightarrow 4x + 2y = 2 \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow \text{وتر مشترک}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 4 \ , \ O\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \quad \text{فاصله مرکز تا وتر مشترک}: d = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

یعنی وتر مشترک از مرکز دایره می‌گذرد، پس وتر مشترک قطر دایره است، پس اندازه آن $2R$ است، پس اندازه وتر مشترک ۴ است.

گروه آموزشی ماز

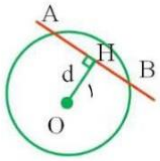
61- دایره‌ای با مرکز $O(-1,2)$ از خط $3y-4x=5$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. این دایره از محور عرض‌ها وتر با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) ۲) ۳) ۴) $2\sqrt{8}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۴ تا ۱۴۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

فاصله مرکز دایره تا خط را مشخص می‌کنیم:



$$d=\frac{|6+4-5|}{5}=1$$

چون دایره وتری به طول ۶ جدا می‌کند، پس $AB=6$ ، به این ترتیب $HB=3$.

$$R^2=OH^2+HB^2\Rightarrow R^2=1+9\Rightarrow R=\sqrt{10}$$

حال معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=10$$

چون می‌خواهد از محور عرض‌ها وتر جدا کند، قرار می‌دهیم: $x=0$

$$(y-2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}y-2=3\to y=5\\ y-2=-3\to y=-1\end{cases}\Rightarrow$$ اندازه وتر برابر ۶ می‌شود.

توجه : فاصله ۲ نقطه $M\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$ و $N\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ ، اندازه وتر جدا شده است.

گروه آموزشی ماز

62- دو دایره به مرکز $O(0,-4)$ با دایره $x^2-8x+y^2+2y=32$ مماس درونی هستند. اختلاف شعاع دو دایره کدام است؟

۱) ۲) ۱۴ ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۴ تا ۱۴۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2-8x+y^2+2y=32\Rightarrow(x-4)^2+(y+1)^2=16+1+32$$

$$(x-4)^2+(y+1)^2=49\Rightarrow\begin{cases}O_1(4,-1)\\ R=7\end{cases}$$

مرکز دایره دیگر $O(0,-4)$ است، پس فاصله ۲ مرکز: $OO_1=\sqrt{16+9}=5$

چون قرار است دو دایره مماس درونی باشند، پس فاصله مرکزها برابر اختلاف شعاع‌هاست. لذا:

$$5=|7-R|\Rightarrow\begin{cases}R=2\to(x-0)^2+(y+4)^2=4\\ R=12\to(x-0)^2+(y+4)^2=144\end{cases}$$

پس ۲ دایره ایجاد می‌شود که اختلاف شعاع آن‌ها ۱۰ واحد است.

گروه آموزشی ماز

63- دایره‌ای به مرکز $O(3,-1)$ و شعاع r، بر دایره $x^2+y^2+2x+8y+8=0$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای r کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۴ تا ۱۴۱ ـ متوسط)

نکته۱:

در معادله گسترده دایره $x^2+y^2+ax+by+c=0$، مرکز به صورت $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع برابر با $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ است.

نکته۲:

در حالتی که دو دایره مماس خارج باشند، رابطه $OO'=d+d'$ و در حالتی که مماس داخل باشند، رابطه $OO'=|r-r'|$ برقرار است.

پاسخ تشریحی:

$$x^2+y^2+2x+8y+8=0 \Rightarrow O'(-1,-4)$$

$$r'=\frac{\sqrt{4+64-32}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

طول خط‌المرکزین را می‌یابیم:

$$O(3,-1),O'(-1,-4)\Rightarrow OO'=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

حالت مماس خارج: $5=r+3\Rightarrow r=2$

حالت مماس داخل:

$$5=|r-3|\Rightarrow\begin{cases} r-3=5\rightarrow r=8 \\ r-3=-5\rightarrow r=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن r برابر $8+2=10$ است.

گروه آموزشی ماز

64- در یک بیضی با قطرهای بزرگ و کوچک $AA'=8$ و BB'، خروج از مرکز $e=\frac{1}{4}$ است. اگر مثلث $A\hat{A'}B$ را حول قطر بزرگ دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

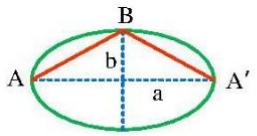
۱) 36π ۲) 40π ۳) 42π ۴) 32π

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۲ تا ۱۳۱ ـ متوسط)

نکته:

در بیضی با طول قطر بزرگ و کوچک $2a$ و $2b$ خروج از مرکز برابر است با: $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

پاسخ تشریحی:



$$\frac{1}{4}=\sqrt{1-\frac{b^2}{16}}\Rightarrow\frac{1}{16}=1-\frac{b^2}{16}\Rightarrow b^2=15$$

با دوران مثلث $A\overset{\triangle}{A'}B$ حول قطر بزرگ، دو مخروط یکسان با شعاع قاعده b و ارتفاع a ساخته می‌شود:

$$V=2\times\frac{\pi}{3}b^2a=\frac{2\pi}{3}\times15\times4=40\pi$$

65- دو دایره $x^2+y^2+2x+6y+k=0$ و $x^2+y^2-4x-2y=k-2$ مماس بیرونی هستند. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ یا ۴ ۲) ۱ یا ۶ ۳) ۴ یا ۶ ۴) ۳ یا ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۴ تا ۱۴۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

شرط آن‌که دو دایره با شعاع R_1 و R_2 مماس بیرونی باشند، آن است که فاصله مراکز آن‌ها برابر جمع شعاع آن دو دایره باشد.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+6y+k=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=10-k \\ R_1=\sqrt{10-k}\ ,\ O_1\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=k-2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=k+3 \\ R_2=\sqrt{k+3}\ ,\ O_2\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$d=O_1O_2=\sqrt{9+16}=5$$

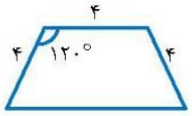
$$\Rightarrow \sqrt{10-k}+\sqrt{k+3}=5 \xrightarrow[-3<k<10]{\text{توان ۲}} 10-\cancel{k}+\cancel{k}+3+2\sqrt{(10-k)(k+3)}=25$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (10-k)(k+3)=36 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=6 \end{cases}$$

هر دو مقدار k قابل قبول هستند.

گروه آموزشی ماز

66- اگر ذوزنقه شکل مقابل، حول قاعده بزرگ دوران کند، حجم شکل به دست آمده چه عددی است؟



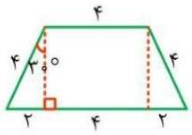
۱) 56π
۲) 48π
۳) 64π
۴) 72π

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۲۲ و ۱۲۳ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

قاعده بزرگ $=8$ و $h=2\sqrt{3}$

وقتی شکل حول قاعده بزرگ دوران می‌کند، یک استوانه و دو مخروط پدید می‌آید.

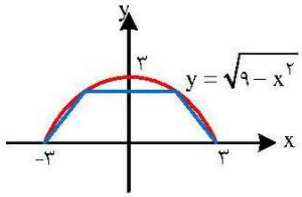


حجم استوانه $\begin{cases} h=4 \\ r=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow V=\pi(2\sqrt{3})^2.(4)=48\pi$

حجم یکی از مخروط‌ها $\begin{cases} r=2\sqrt{3} \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(2\sqrt{3})^2\times 2=8\pi$

کل $V=48\pi+2\times 8\pi=48\pi+16\pi=64\pi$

67- در شکل روبه‌رو، ذوزنقه درون نیم‌دایره به شعاع ۳ محاط شده است. حداکثر مساحت ذوزنقه چه عددی است؟



۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $۴\sqrt{۲}$

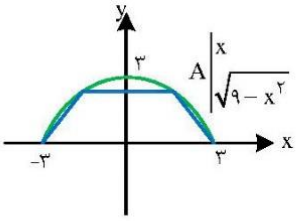
۳) $۸\sqrt{۲}$

۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۸}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۱۳ تا ۱۱۹ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

قاعده بزرگ برابر ۶، قاعده کوچک برابر $۲x$ و ارتفاع $\sqrt{۹-x^۲}$ است. پس: $S=\frac{۶+۲x}{۲}\times\sqrt{۹-x^۲}$ ذوزنقه



$$S(x)=(x+۳)\sqrt{۹-x^۲}$$

$$S'(x)=\sqrt{۹-x^۲}+\frac{-x}{\sqrt{۹-x^۲}}(x+۳)=\frac{۹-x^۲-x^۲-۳x}{\sqrt{۹-x^۲}}$$

$$S'(x)=۲x^۲+۳x-۹=۰,\ \ x=\frac{-۳+\sqrt{۹+۷۲}}{۴}=\frac{-۳+۹}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$S_{max}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

68- دایره $x^۲+y^۲-۴x-۴y-۱=۰$ را چند واحد در راستای عمودی منتقل کنیم، تا بر خط $۵x-۱۲y+۱۷=۰$ مماس شود؟

۱) ۳ واحد بالا یا ۳/۵ واحد به پایین

۲) ۳ واحد پایین یا ۳/۵ واحد به بالا

۳) ۲/۵ واحد پایین یا ۳/۵ واحد به بالا

۴) ۲/۵ واحد پایین یا ۱/۵ واحد به بالا

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳٤ تا ۱٤۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۴}=۳\ ,\ O(۲,۲)$$

$$O'(۲,۲+k)\ ,\ ۵x-۱۲y+۱۷=۰$$

$$O'H=R\Rightarrow\frac{|۱۰-۱۲(۲+k)+۱۷|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=۳\Rightarrow\frac{|-۱۲k+۳|}{۱۳}=۳$$

$$\Rightarrow|۱۲k-۳|=۳۹\Rightarrow ۱۲k-۳=\pm۳۹\Rightarrow\begin{cases}k=۳/۵>۰\\k=-۳<۰\end{cases}\Rightarrow$$ گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱-گزینه ۴ درست است.

خط گذرنده از دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{۲-۱}{۵-۳}=\frac{۱}{۲}\begin{cases} m'=-۲\Rightarrow \frac{a}{۲}=-۲\Rightarrow a=-۴\Rightarrow ۲y+۴x-۳=۰ \\ y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۳)\Rightarrow ۲y-۲=x-۳\Rightarrow ۲y-x+۱=۰ \end{cases}$$

نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط را بدست می‌آوریم:

$$\frac{|۲y+۴x-۳|}{\sqrt{۴+۱۶}}=\frac{|۲y-x+۱|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow\begin{cases} \frac{۲y+۴x-۳}{۲}=۲y-x+۱=۲y-۶x+۵=۰\rightarrow m=۳ \\ \frac{۲y+۴x-۳}{۲}=-۲y+x-۱=۶y+۲x-۱=۰\rightarrow m=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

پس با خط $y=-\frac{۱}{۳}x$ زاویه ۴۵° می‌سازند.

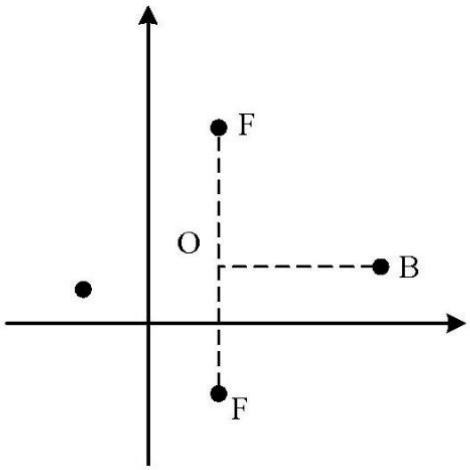
۲. گزینه ۱ درست است.

شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز آن تا خط مماس است. $R=\left|\frac{۴-۳-۱۴}{\sqrt{۴+۹}}\right|=\sqrt{۱۳}$

۳. گزینه ۳ درست است.

مرکز بیضی $(۱,۲)$ و فاصلهٔ کانونی $FF'=۶$ پس $c=۳$ و $b=OB=۴$ در نتیجه $a=\sqrt{b^۲+c^۲}=۵$

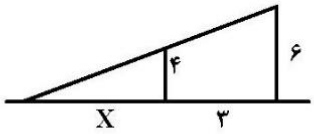
خروج از مرکز آن $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$



۴. گزینه ۱ درست است.

اگر نقطه تلاقی دو ساق به وسط یک قاعده وصل شود قاعده دیگر را نصف می‌کند. یعنی خط گذرا بر وسط‌های دو قاعده امتداد ساق‌ها را در یک نقطه قطع می‌کند پس $AB=۰$

۵. گزینه ۳ درست است.



$$\frac{x}{x+۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow x=۶$$

حجم حاصل تفاضل حجم‌های دو مخروط دوار است.

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(۳۶\times۹-۱۶\times۶)=\pi(۱۰۸-۳۲)=۷۶\pi$$

۶- گزینه ۱ درست است.

مرکز دایره $O(۱,۱)$ و نقطه تماس $A(۲,۳)$، $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵$ خط مماس عمود بر شعاع AO است.

$$m=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲ \Rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس $y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$ یا $y=-\frac{۱}{۲}x+۴$ به ازای $y=۰$ مقدار $x=۸$

۷. گزینه ۳ درست است.

معادله کلی دایره $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است.

$$\begin{cases} ۲a+۵b+c+۲۹=۰ \\ ۴a+b+c+۱۷=۰ \\ -۶a+b+c+۳۷=۰ \end{cases} \Rightarrow a=۲\,,\, b=-۲\,,\, c=-۲۳$$

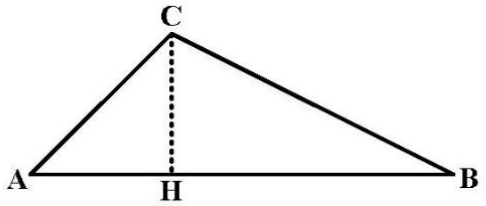
معادله دایره مطلوب $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$ در نتیجه $۲R=۱۰\,,\, R=۵$

۸. گزینه ۳ درست است.

در مثلث قائم الزاویه ACH داریم $CH=۴$ و $\hat{A}=۴۵^\circ$ پس $AH=۴$ با فرض $BH=x$ مساحت مثلث محاسبه شود.

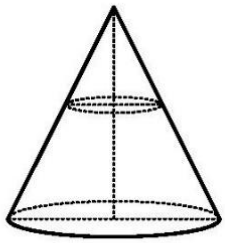
$$S=\frac{۱}{۲}CH.AB \Rightarrow ۸(۱+\sqrt{۳})=۲(۴+x) \Rightarrow x=۴\sqrt{۳}$$

در مثلث قائم الزاویه CHB داریم $BC=\sqrt{۴۸+۱۶}=۸$



۹- گزینه ۱ درست است.

ارتفاع مخروط h و فاصله دو صفحه x باشد.



$$\frac{V_۱}{V_۲}=\left(\frac{h-x}{h}\right)^۳=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{h-x}{h}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲-\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$

۱۰. گزینه ۱ درست است.

معادله خط گذرنده از $\left|\begin{matrix}۵\\۰\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ را می‌نویسیم:

$$AC:\frac{x}{۵}+\frac{y}{۲}=۱\Rightarrow ۲x+۵y=۱۰$$

$$m_{AC}=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow m_{AB}=\frac{۵}{۲}$$

معادله AB گذرنده از $\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ را می‌نویسیم:

$$AB:y=\frac{۵}{۲}x+۱\Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{۴}{۵}\\۳\end{matrix}\right.$$

$$A:\begin{cases}۲x+۵y=۱۰\\ y=\frac{۵}{۲}x+۱\Rightarrow ۲x+\frac{۲۵}{۲}x+۵=۱۰\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۲۹}\end{cases}$$

معادله خط BC گذرنده از $\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ برابر است با:

$$m_{BC}=\frac{۳-۰}{\frac{۴}{۵}-۱}=-۱۵\Rightarrow y=-۱۵x+۱۵$$

مختصات نقطه C برابر است با:

$$\begin{cases}۲x+۵y=۱۰\\ y=-۱۵x+۱۵\Rightarrow ۲x-۷۵x+۷۵=۱۰\Rightarrow x=\frac{۶۵}{۷۳}\Rightarrow y=-۱۵(\frac{۶۵}{۷۳})+۱۵=۱۵(\frac{۸}{۷۳})=\frac{۱۲۰}{۷۳}\Rightarrow\end{cases}$$

$$x_C+y_C=\frac{۱۸۵}{۷۳}$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

رأس B قرینه A نسبت به M است. معادله BC برابر است با:

$$B=۲M-A=(۵,۵)\Rightarrow m_{BC}=\frac{۵-۱}{۵-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۵}{۳}$$

پس شیب AH، قرینه و وارون شیب BC، برابر $-\frac{۳}{۴}$ و معادله خط AH برابر است با:

$$y=-\frac{۳}{۴}x-\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{۴}{۳}y=-x-۳$$

و محل برخورد آن با $y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۵}{۳}$ برابر است با:

$$\frac{۳}{۴}y=x-\frac{۵}{۴}\overset{+}{\Rightarrow}\frac{۲۵}{۱۲}y=-\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۵۱}{۲۵}=-۲/۰۴$$

۱۲-گزینه ۱ درست است.

$S=(-۳,\frac{۱۳+(-۱۱)}{۲})=(-۳,۱)$ مرکز و $۲c=|۱۳-(-۱۱)|=۲۴$

$b=\left|\frac{۱}{۲}+۳\right|=\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۲b=۷$

مجموع فواصل برابر $۲a=\sqrt{۷^۲+۲۴^۲}=۲۵$ است.

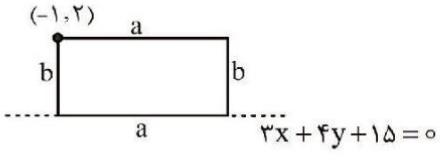
۱۳-گزینه ۱ درست است.

مرکز دایره وسط قطر است بنابراین $O\left|\begin{matrix}۴\\۱\end{matrix}\right.$. شعاع دایره $OA=OB=r$ است:

$r=\sqrt{۱۳}$ فقط گزینه (۱) بر روی محیط دایره است. زیرا فاصله آن تا مرکز دایره برابر r می‌باشد.

۱۴. گزینه ۴ درست است.

نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی خط $۳x+۴y+۱۵=۰$ قرار ندارد، پس مستطیل به صورت مقابل است و داریم:



$$b=\frac{|-۳+۸+۱۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲۰}{۵}=۴\xrightarrow{\text{محیط}=۲۴}۲۴=۲(a+۴)\Rightarrow a+۴=۱۲\Rightarrow a=۸$$

پس مساحت مستطیل برابر $S=۸\times۴=۳۲$ می‌باشد.

۱۵- گزینه ۲ درست است.

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است پس:

$$r=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\Rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲\xrightarrow{y=۰}(x-۲)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۱\\x-۲=-۱\end{cases}$$

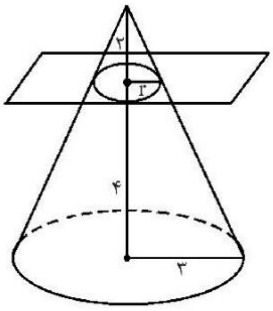
$$\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=۱\end{cases}\Rightarrow \text{طول وتر}=۳-۱=۲$$

۱۶-گزینه ۳ درست است.

محیط مثلث MFF' برابر $۲a+۲c$ و مجموع فواصل F از دو نقطهٔ انتهایی قطر کوچک برابر $۲a$ می‌باشد پس:

$$\begin{cases}۲a+۲c=۳۲\\۲a=۲۰\end{cases}\Rightarrow ۲c=۱۲\Rightarrow c=۶\ ,\ a=۱۰\Rightarrow e=\frac{c}{a}=۰/۶$$

۱۷. گزینه ۱ درست است.



$$\frac{۲}{۶}=\frac{r}{۴}\Rightarrow r=\frac{۴}{۳}\Rightarrow S=\pi(\frac{۴}{۳})^{۲}=\frac{۱۶}{۹}\pi$$

۱۸. گزینه ۴ درست است.

چون دایره در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن $O(\alpha,\alpha)$ و شعاع آن α است. از طرفی فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس $۳x+۴y=۱۲$، برابر شعاع دایره است. پس:

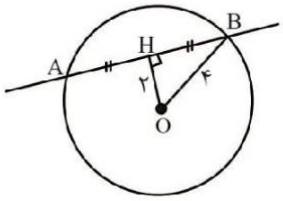
$$\alpha=\frac{|۳\alpha+۴\alpha-۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}\Rightarrow ۵\alpha=|۷\alpha-۱۲|\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۶\\ \alpha=۱\end{cases}$$

۱۹. گزینه ۲ درست است.

باید معادلهٔ دو دایره را در یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حل کنیم تا نقاط A و B معلوم شود.

$$\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}+x+۲y=۱۱\\ x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۱۴\end{cases}\xrightarrow{-}۳x+۴y=-۳$$

بنابراین نقاط A و B، نقاط تلاقی خط $۳x+۴y=-۳$ و هر یک از دایره‌ها است، حال باید طول وتر AB را به کمک یکی از دایره‌ها به دست آوریم:



$$\begin{cases}O(۱,۱)\ ,\ r=\sqrt{۱+۱+۱۴}=۴\\ OH=\frac{|۳+۴+۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۲\end{cases}\Rightarrow BH^{۲}+۲^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow BH=\sqrt{۱۲}\Rightarrow AB=۲BH=۲\sqrt{۱۲}=۴\sqrt{۳}$$

۲۰. گزینه ۴ درست است.

فاصلهٔ مرکز بیضی از نزدیک‌ترین نقاط بیضی برابر b و فاصلهٔ یک کانون بیضی از نزدیک‌ترین نقاط آن $a-c$ می‌باشد، پس:

$$\xrightarrow{a-c=۲}a+c=۴$$

$$\begin{cases}b=۲\sqrt{۲}\\ a-c=۲\end{cases}\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}a^{۲}=۸+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}-c^{۲}=۸\Rightarrow(a-c)(a+c)=۸$$

حال مقادیر a و c را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}a-c=۲\\ a+c=۴\end{cases}\Rightarrow a=۳,c=۱\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$$

۲۱. گزینه ۳ درست است.

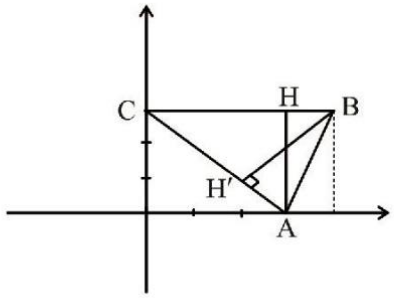
$$AB=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

معادله AB: $۳x-۴y+۶=۰$

$$CH=\frac{|۳\times ۰+(-۴)(-۱)+۶|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$S_{ABCD}=۵\times ۲=۱۰$$

۲۲. گزینه ۴ درست است.



معادلهٔ ارتفاع AH : $x=۳$

$$M_{AC}=\frac{۳-۰}{۰-۳}=-۱\Rightarrow m_{BH'}=۱$$

معادلهٔ ارتفاع BH′ : $y-۳=۱(x-۴)\Rightarrow y=x-۱$

$$\begin{cases}x=۳\\ y=x-۱\Rightarrow y=۳-۱=۲\end{cases}\Rightarrow(۳,۲)$$ مختصات نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث

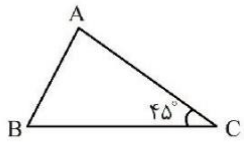
۲۳. گزینه ۱ درست است.

$$AC=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۱-۴)^۲}=۳\sqrt{۲},BC=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۱-۱)^۲}=۴$$

$$m_{BC}=\frac{۱-۱}{۵-۱}=۰$$

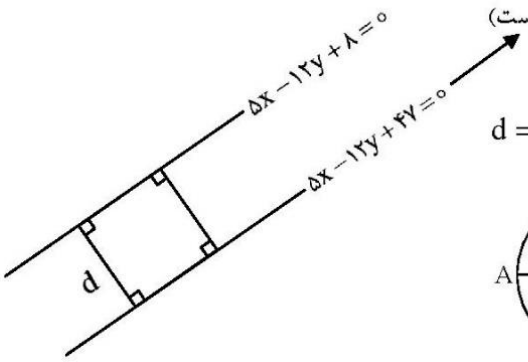
$$m_{AC}=\frac{۴-۱}{۵-۲}=۱$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۴۵^\circ$$



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AC.BC.\sin\alpha=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳\sqrt{۲}\times\sin ۴۵^\circ=۶\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۶$$

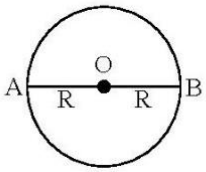
۲۴- گزینه ۳ درست است.



(دو طرف معادله خط بر ۲− تقسیم شده است)

براساس نتیجه تمرین ۸ صفحهٔ ۹ کتاب ریاضی (۲):

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴۷-۸|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}}\to d=۳\to S_{\square}=d^۲=۹$$

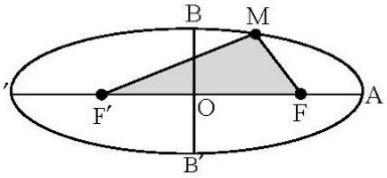


قطر دایره $AB=۲R=\sqrt{(۶-(-۲))^۲+(۴-(-۲))^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$

$$\to R=۵\to S_O=\pi R^۲=۳(۵)^۲=۷۵$$

اختلاف ۲ مساحت $=۷۵-۹=۶۶$

۲۵. گزینه ۳ درست است.



مطابق تعریف مکان هندسی بیضی:

$MF + MF' = ۲a$ و $e = \frac{c}{a}$ (خروج از مرکز) و $FF' = ۲c$ (فاصلهٔ کانونی)

$AA' = ۲a$ (قطر بزرگ) و $BB' = ۲b$ (قطر کوچک). بنابراین محیط $\overset{\Delta}{MFF'}$ برابر است با $۲a + ۲c$:

$$\begin{cases} ۲a + ۲c = ۳۲ \\ e = \frac{c}{a} = ۰/۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + c = ۱۶ \\ c = ۰/۶a \end{cases} \rightarrow a = ۱۰, c = ۶$$

از طرفی در بیضی $a^۲ = b^۲ + c^۲ \leftarrow ۱۰^۲ = b^۲ + ۶^۲ \leftarrow b = ۸$ و $۲b = ۱۶ \leftarrow$ اندازه قطر کوچک $= ۱۶$

۲۶. گزینه ۲ درست است.

محیط مثلث MFF' برابر $۲a + ۲c$ و مجموع فواصل **F** از دو نقطهٔ انتهایی قطر کوچک $۲a$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} ۲a + ۲c = ۳۲ \\ ۲a = ۲۰ \end{cases} \rightarrow a = ۱۰, c = ۶ \rightarrow e = \frac{c}{a} = ۰/۶$$ خروج از مرکز بیضی

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \rightarrow ۱۰۰ = b^۲ + ۳۶ \rightarrow b^۲ = ۶۴ \rightarrow b = ۸ \rightarrow$ اندازه قطر کوچک بیضی $= ۲b = ۱۶$

اختلاف مورد نظر $= ۱۶ - ۰/۶ = ۱۵/۴$

۲۷-گزینه ۱ درست است.

برای آن که دو دایره دارای ۴ مماس مشترک باشند باید متخارج باشند یعنی: $d > R + R'$

دردایره اول: $x^۲ + y^۲ = ۹ \rightarrow o(۰,۰)\ ,\ R = ۳$

در دایره دوم: $x^۲ + (y - ۵)^۲ = ۸ - a \rightarrow o'(۰,۵)\ ,\ R' = \sqrt{۸ - a}$

$$\begin{cases} d = oo' = ۵ \\ R + R' = ۳ + \sqrt{۸ - a} \end{cases}$$

پس باید داشته باشیم:

$$۵ > ۳ + \sqrt{۸ - a} \Rightarrow ۲ > \sqrt{۸ - a} \Rightarrow ۴ > ۸ - a \Rightarrow a > ۴$$

امّا با توجه به حضور رادیکال در نامساوی، به شرط $۸ - a \geq ۰$ هم توجه کنید: $a \leq ۸$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده برای a داریم: $۴ < a \leq ۸$

واضح است که چهار مقدار طبیعی $a = ۵, ۶, ۷, ۸$ در این نامساوی صدق می‌کنند.

۲۸. گزینه ۱ درست است.

$$\tan ۱۳۵^\circ = \text{شیب خط} = \frac{-(۲a+۳)}{-(۵-a)}$$

$$-۱ = \frac{۲a+۳}{۵-a} \rightarrow \boxed{a=-۸} \rightarrow -۱۳x-۱۳y=۷۸$$

$$\xrightarrow{\div(-۱۳)} \boxed{x+y+۶=۰} \xrightarrow[y=۰]{\text{طول از مبدأ}} x=-۶$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y=-۶$$

$$\xrightarrow{\text{شیب خط}} m=-۱$$

حاصلضرب ۴ مقدار خواسته شده $= (-۸)(-۶)(-۶)(-۱) = ۲۸۸$

۲۹. گزینه ۲ درست است.

با فرض آنکه طول ضلع مربع **a** باشد، آنگاه $D(x,۰)$ ، $C(x+a,۰)$ و در نتیجه $A(x,۳x)$ و $B(x+a,۳x)$ خواهد بود:

$$OA = \sqrt{x^۲+(۳x)^۲} = x\sqrt{۱۰}$$

$$OB = ۱۰ \rightarrow \sqrt{(x+a)^۲+(۳x)^۲} = ۱۰ \rightarrow x^۲+a^۲+۲ax+۹x^۲ = ۱۰۰ \quad (۱)$$

رابطه فیثاغورث در $\overset{\Delta}{OAD}$: $x^۲+a^۲ = (x\sqrt{۱۰})^۲ \rightarrow a^۲ = ۹x^۲ \xrightarrow[a>۰]{x>۰} a = ۳x \quad (۲)$

$$(۱) \text{ و } (۲) \xRightarrow{x=\frac{۱}{۳}a} \frac{۱}{۹}a^۲+a^۲+۲a\left(\frac{۱}{۳}a\right)+a^۲ = ۱۰۰ \rightarrow \frac{۲۵}{۹}a^۲ = ۱۰۰$$

$a^۲ = ۳۶ \rightarrow S_\square = a^۲ = ۳۶$ مساحت مربع

۳۰- گزینه ۴ درست است.

مرکز دایره برخط $y=۲x$ واقع است، بنابراین فاصله $O(x,۲x)$ از B,A یکسان و برابر شعاع دایره است:

$$OA = OB = R \rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲+(۲x-۱)^۲} = \sqrt{(x-۴)^۲+(۲x+۲)^۲}$$

$$\rightarrow -۲x+۱-۴x+۱ = -۸x+۱۶+۸x+۴ \rightarrow -۶x = ۱۸ \rightarrow x=-۳ \Rightarrow O(-۳,-۶)$$

$$OA = \sqrt{(-۳-۱)^۲+(-۶-۱)^۲} = \sqrt{۶۵} = R$$

$S_{\text{دایره}} = \pi R^۲ = ۶۵\pi$

۳۱. گزینه ۱ درست است.

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰$$

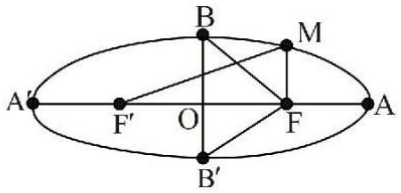
$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶\rightarrow O(۲,۳),R=۴$$

$$OO'=|R-R'|\rightarrow\sqrt{(۲-(-۱)^۲+(۳-(-۱)^۲}=۴-R'\rightarrow ۵=|۴-R'|\rightarrow R'=۹,O'(-۱,-۱)$$

$$(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹^۲\rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲y-۷۹=۰$$

$$\underbrace{a=۲\quad b=۲\quad c=-۷۹}_{a+b+c=-۷۵}$$

۳۲ گزینه ۲ درست است.



مطابق تعریف بیضی : $MF+MF'=۲a\,,a^۲=b^۲+c^۲$

$\overset{\Delta}{MFF'}$ محیط $=۳۲$

$$\underbrace{MF+MF'}_{۲a}+\underbrace{FF'}_{۲c}=۳۲$$

$$۲a+۲c=۳۲$$

$\boxed{a+c=۱۶}$ (۱)

$$BF'=BF=\sqrt{b^۲+c^۲}=a\,,BF+BF'=۲a=۲۰\rightarrow\boxed{a=۱۰}\xrightarrow{\text{طبق (۱)}}\boxed{c=۶},\boxed{b=۸}$$

اندازهٔ قطر کوچک بیضی $=۲b=۱۶$

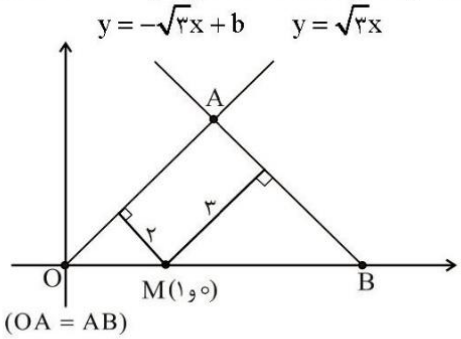
اندازهٔ خروج از مرکز بیضی $=\frac{c}{a}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$

اختلاف موردنظر سؤال $=۱۶-۰/۶=۱۵/۴$

۳۳. گزینه ۴ درست است.

با توجه به شکل زیر، خط با شیب مثبت $y=\sqrt{۳}x+a$ است که با توجه به اینکه از مبدا مختصات می‌گذرد، $a=۰$ است.

خط با شیب منفی نیز $y=-\sqrt{۳}x+b$ است.



چون شیب این دو خط، قرینهٔ یکدیگر است، زاویهٔ این دوخط با جهت مثبت محور xها مکمل هم هستند، به عبارتی در مثلث OAB زوایای $\hat{O}$ و $\hat{B}$ برابرند و این مثلث، متساوی‌الساقین است $(OA = AB)$. می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق، برابر با ارتفاع نظیر ساق است، پس در اینجا ارتفاع نظیر ساق برابر با $۲+۳=۵$ است.

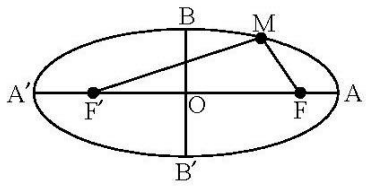
حالا کافی است فاصلهٔ نقطه $O(۰,۰)$ از خط $y+\sqrt{۳}x-b=۰$ را برابر با ۵ قرار دهیم:

$$\frac{|۰+۰-b|}{\sqrt{۱+۳}}=۵ \Rightarrow |b|=۱۰ \Rightarrow b=\pm ۱۰$$

با توجه به شکل، عرض از مبدأ این خط مثبت است و $b=۱۰$ قابل قبول است، پس:

$$a+b=۰+۱۰=۱۰$$

۳۴. گزینه ۲ درست است.



مطابق تعریف مکان هندسی بیضی:

$e=\frac{c}{a}$ (خروج از مرکز بیضی) و $MF+MF'=۲a$ و $FF'=۲C$ (فاصلهٔ کانونی)

$AA'=۲a$ (قطر بزرگ) و $BB'=۲b$ (قطر کوچک). بنابراین:

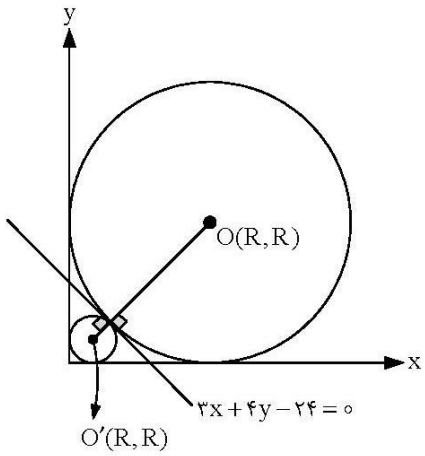
$$\overset{\Delta}{MFF'}\ \text{محیط}=۳۲=MF+MF'+FF' \Rightarrow ۳۲=۲a+۲C \rightarrow \boxed{a+c=۱۶}\ (۱)$$

$$e=۰/۶=\frac{c}{a} \rightarrow c=۰/۶a \xrightarrow{(۱)\ \text{جاگذاری}} a=۱۰, C=۶$$

در بیضی: $a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۱۰۰=b^۲+۳۶ \rightarrow b=۸ \rightarrow ۲b=۲(۸)=۱۶$ اندازه قطر کوچک بیضی

۳۵. گزینه ۴ درست است.

مختصات مرکز دایره‌ای که بر محورهای مختصات در ناحیه اول مماس است، به‌صورت $O(R,R)$ بوده و فاصلهٔ O تا خط $۳x+۴y-۲۴=۰$ همان شعاع دایره (R) است:



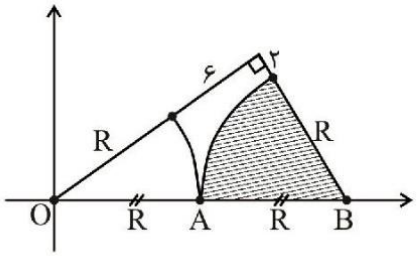
$$R=\frac{|۳R+۴R-۲۴|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=R$$

$$|۷R-۲۴|=۵R \Rightarrow \begin{cases} ۷R-۲۴=۵R \rightarrow R=۱۲ \\ ۷R-۲۴=-۵R \rightarrow R=۲ \end{cases}$$

$$S_۱+S_۲=\pi(R_۱^۲+R_۲^۲)$$
$$=\pi(۲^۲+۱۲^۲)$$
$$=۳\times ۱۴۸=۴۴۴$$

۳۶-گزینه ۳ درست است.

به شکل زیر دقت کنید، چون $OA = AB$، پس شعاع‌های هر دو دایره برابر بوده و آن‌ها را R در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:



$$(R+۲)^۲ + (R+۶)^۲ = (۲R)^۲ \Rightarrow (R^۲ + ۴R + ۴) + (R^۲ + ۱۲R + ۳۶) = ۴R^۲$$

خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

تست و پاسخ 1

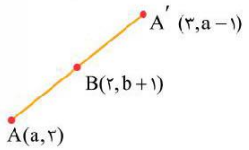
قرینهٔ نقطهٔ $A(a,۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۲,b+۱)$، نقطهٔ $A'(۳,a-۱)$ است. مقدار b کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره میانگین طول نقاط A و A' برابر با طول نقطهٔ B است. برای عرض‌ها هم همین‌طور.

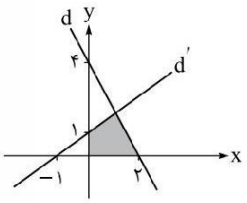
پاسخ تشریحی B وسط A و A' است:



- میانگین طول نقاط A و A'، طول نقطهٔ B می‌شود: $x_B=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}\Rightarrow ۲=\frac{a+۳}{۲}\Rightarrow a=۱$
- میانگین عرض نقاط A و A'، عرض نقطهٔ B می‌شود: $y_B=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\Rightarrow b+۱=\frac{۳+(a-۱)}{۲}\xrightarrow{a=۱}b+۱=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$

تست و پاسخ 2

در شکل رسم‌شده، مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده کدام است؟

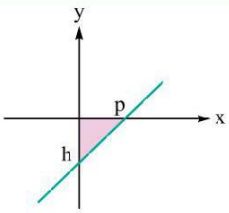


۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از هر خط، دو نقطه داریم. معادله‌هایشان را می‌نویسیم و قطع می‌دهیم تا نقطهٔ تقاطع به دست آید. بعد قسمت رنگی را به یک ذوزنقه و یک مثلث تقسیم می‌کنیم و مساحت‌ها را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه نوشتن معادلهٔ خط

	چه چیزهایی از خط را داریم؟	معادلهٔ خط	مثال
۱	شیب (m) و عرض از مبدأ (h)	$y=mx+h$	معادلهٔ خط با شیب ۲ و عرض از مبدأ ۵: $y=۲x+۵$
۲	شیب (m) و نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$	$y-y_۱=m(x-x_۱)$	معادلهٔ خط با شیب ۲ و گذرنده از نقطهٔ $(۱,۶)$: $y-۶=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x+۴$
۳	دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$	۱) شیب را به دست می‌آوریم: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ ۲) از رابطهٔ $y-y_۱=m(x-x_۲)$ استفاده می‌کنیم.	معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۲,۷)$ و $(-۱,۱)$: ۱) $m=\frac{۷-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۶}{۳}=۲$ ۲) $y-۷=۲(x-۲)\Rightarrow y=۲x+۳$
۴	طول از مبدأ (p) و عرض از مبدأ (h)	 $\frac{x}{p}+\frac{y}{h}=۱$	معادلهٔ خط با طول از مبدأ ۴ و عرض از مبدأ ۲: $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}=۱\xrightarrow{\times ۲}\frac{x}{۲}+y=۲\Rightarrow y=\frac{-x}{۲}+۲$

نکته برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ برخورد دو خط، باید دو معادله را در یک دستگاه دو معادله ـ دو مجهول حل کنیم. البته می‌توانیم yها را تنها کنیم و با هم برابر قرار دهیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از هر دو خط، عرض از مبدأ و طول از مبدأ را داریم. به کمک سطر ۴ جدول درس‌نامه، معادله‌هایشان را می‌نویسیم:

$$d \text{ خط}: \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \xrightarrow[q=4]{p=2} \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \xrightarrow{\times 4} y=-2x+4$$

$$d' \text{ خط}: \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \xrightarrow[q=1]{p=-1} \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \Rightarrow y=x+1$$

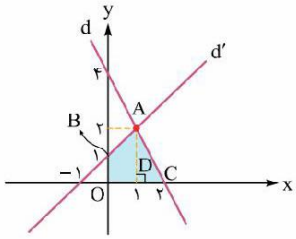
گام دوم: ضابطه‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$y_d=y_{d'} \Rightarrow -2x+4=x+1 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

$x=1$ را در معادلهٔ d' قرار می‌دهیم:

$$y=x+1 \xrightarrow{x=1} y=2$$

پس نقطهٔ $A(1,2)$ نقطهٔ تقاطع دو خط است.



گام سوم: قسمت رنگ‌شده را به یک ذوزنقه و یک مثلث تقسیم می‌کنیم:

$$S_{OBAD}=\frac{(\text{قاعدهٔ بزرگ}+\text{قاعدهٔ کوچک})\times \text{ارتفاع}}{2}=\frac{(1+2)\times 1}{2}=1/5$$

$$S_{ACD}=\frac{\text{ارتفاع}\times \text{قاعده}}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} S_{\text{رنگی}}=1/5+1=2/5$$

تست و پاسخ 3

نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(1,1)$ و $(4,-2)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\sqrt{65}$ ۲) $\sqrt{56}$ ۳) $\sqrt{53}$ ۴) $\sqrt{67}$

پاسخ: گزینه ۱

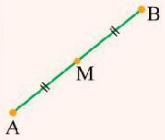
خودت حل کنی بهتره فاصلهٔ هر نقطه روی محیط دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است.

درس‌نامه «فاصلهٔ دو نقطه از هم» و «نقطهٔ وسط یک پاره‌خط»

۱) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B در دستگاه مختصات به کمک رابطهٔ فیثاغورس زیر به دست می‌آید:

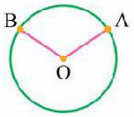
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(\text{اختلاف xها})^2+(\text{اختلاف yها})^2}$$

۲) مختصات نقطهٔ وسطِ دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{یا}} M=\frac{A+B}{2}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** باید فاصلهٔ $A(1,1)$ و $B(4,2)$ از مرکز دایره یعنی نقطهٔ $O(a,2a)$ یکسان باشد.



$$AO=\sqrt{(x_O-x_A)^2+(y_O-y_A)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+1+4a^2-4a+1}=\sqrt{5a^2-6a+2}$$

$$BO=\sqrt{(x_O-x_B)^2+(y_O-y_B)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(2a+2)^2}=\sqrt{a^2-8a+16+4a^2+8a+4}=\sqrt{5a^2+20}$$

دو مقدار را برابر قرار می‌دهیم:

$$AO = BO \Rightarrow \sqrt{5a^2 - 6a + 2} = \sqrt{5a^2 + 20} \xrightarrow{\text{توان}۲} \cancel{5a^2} - 6a + 2 = \cancel{5a^2} + 20 \Rightarrow 6a = -18 \Rightarrow a = -3$$

گام دوم: با جای‌گذاری $a = -3$ در AO یا BO، شعاع به دست می‌آید:

$$R = BO = \sqrt{5a^2 + 20} \xrightarrow{a=-3} R = \sqrt{5(-3)^2 + 20} = \sqrt{65}$$

تست و پاسخ 4

مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به معادلهٔ خطوط $y = x + 4$ ، $x = 5$ ، محور yها و نیمساز ناحیهٔ اول برابر کدام است؟

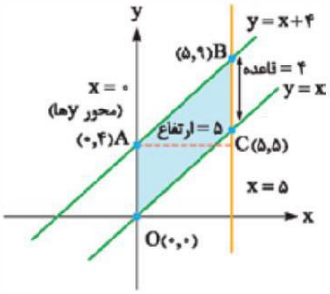
۱) ۸ ۲) ۱۵

۳) ۱۲ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک رسم شکل، سؤال را حل کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل مناسب رسم می‌کنیم:



گام دوم: مساحت را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = 4 \times 5 = 20$$

تست و پاسخ 5

هرگاه معادلات اضلاع AB و AC و BC به ترتیب $y - 2x + 3 = 0$ ، $2x + 3y + 1 = 0$ و $3x - 4y + 2 = 0$ باشند، در مثلث ABC طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۸

۳) ۱/۸ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره کافی است فاصلهٔ A تا ضلع BC را به دست آورید.

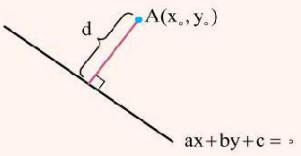
درس نامه فاصلهٔ نقطه از خط

برای به دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از یک خط، باید معادلهٔ خط را به شکل $ax + by + c = 0$ درآوریم و بعد از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

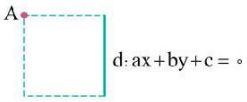
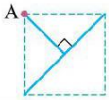
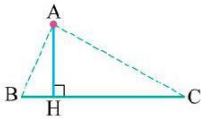
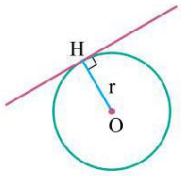
نقطهٔ (x_0, y_0) را در سمت چپ تساوی $ax+by+c=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

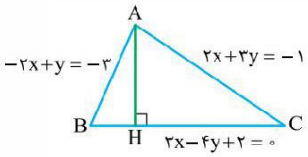
ضریب x و y در معادلهٔ خط



کاربردهای مهم فاصلهٔ نقطه از خط در مسائل

مقدار قابل محاسبه	شکل	توضیح
ضلع مربع		فاصلهٔ A تا خط d = ضلع
قطر مربع		فاصلهٔ A تا قطر = نصف قطر
ارتفاع مثلث		فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC = طول ارتفاع AH
شعاع دایره		فاصلهٔ مرکز تا خط مماس = شعاع

پاسخ تشریحی **گام اول**: شکل فرضی می‌کشیم:



گام دوم: از تقاطع دو خط AB و AC، نقطهٔ A به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} AB: -۲x+y=-۳ \\ AC: ۲x+۳y=-۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۴y=-۴ \Rightarrow y=-۱$$

با جای‌گذاری $y=-۱$ در AC، داریم: $۲x-۳=-۱ \Rightarrow x=۱$

پس مختصات A به صورت $(۱,-۱)$ است.

گام سوم: طول ارتفاع AH، همان فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC است.

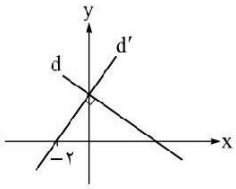
معادلهٔ BC را به صورت فرم کلی داریم: $۳x-۴y+۲=۰$

فاصلهٔ $A(۱,-۱)$ از $۳x-۴y+۲=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۹}{۵}=۱/۸$$

تست و پاسخ 6

در شکل زیر، خط d به معادلهٔ $۹-kx=(k+۱)y$ رسم شده است. مجموع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره باید معادلهٔ $m_d.m_{d'}=-۱$ را حل کنیم و در معادلهٔ درجه‌دوم به کمک $S=\frac{-b}{a}$، مجموع مقادیر k را پیدا کنیم.

درس‌نامه وضعیت دو خط $y = m_1x_1 + h_1$ و $y = m_2x + h_2$ نسبت به هم

حالات دو خط نسبت به هم	شرط	مثال
موازی (غیرمنطبق)	$m_1 = m_2 \ , \ h_1 \neq h_2$	$y = 3x + 4$ $y = 3x - 2$
عمود	$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ یا $m_1m_2 = -1$	$y = \frac{3}{4}x + 1$ $y = \frac{-4}{3}x + 2$
متقاطع	$m_1 \neq m_2$	$y = x - 1$ $y = 3x + 4$
منطبق	$m_1 = m_2 \ , \ h_1 = h_2$	$y = 2x + 5$ $2y = 4x + 10$

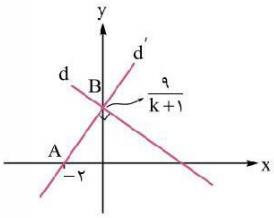
پاسخ تشریحی **گام اول:** در معادلهٔ خط d، با جای‌گذاری $x = 0$، عرض از مبدأ را پیدا می‌کنیم:

$$9 - kx = (k+1)y \xrightarrow{x=0} 9 = (k+1)y \Rightarrow y = \frac{9}{k+1}$$

گام دوم: معادلهٔ d را استاندارد می‌کنیم تا شیب d به دست آید:

$$(k+1)y = -kx + 9 \xrightarrow{\div(k+1)} y = \underbrace{\frac{-k}{k+1}}_{m_d}x + \frac{9}{k+1}$$

گام سوم: از خط d'، دو نقطه را داریم، شیبش را حساب می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} A(-2,0) \\ B(0,\frac{9}{k+1}) \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{d'} = \frac{\frac{9}{k+1} - 0}{0-(-2)} = \frac{9}{2(k+1)}$$

گام چهارم: d و d' بر هم عمودند، پس شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است.

$$m_d = \frac{-1}{m_{d'}} \Rightarrow \frac{-k}{k+1} = \frac{-1}{\frac{9}{2(k+1)}} \Rightarrow \frac{-k}{k+1} = \frac{-2(k+1)}{9} \Rightarrow 2(k+1)^2 = 9k \Rightarrow 2k^2 + 4k + 2 = 9k \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

گام پنجم: مجموع مقادیر k برابر است با:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2} = 2/5$$

تست و پاسخ 7

معادلهٔ دو ضلع مجاور یک مستطیل $x - my = 2$ و $2mx + my = 3$ و نقطهٔ $A(2,1)$ یک رأس آن است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۲/۸ ۳) ۲/۱ ۴) ۳/۵

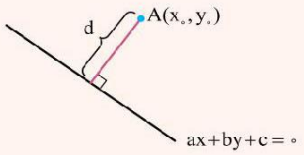
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برای درک بهتر سؤالات هندسهٔ تحلیلی، یک شکل تقریبی برای مسئله رسم کنید و روی آن تحلیل کنید.

خودت حل کنی بهتره در مستطیل دو ضلع مجاور، بر هم عمودند.

درس‌نامه فاصلهٔ نقطه از خط

برای به دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از یک خط، باید معادلهٔ خط را به شکل $ax + by + c = 0$ درآوریم و بعد از رابطهٔ مقابل استفاده کنیم:



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نقطهٔ (x_0, y_0) را در سمت چپ تساوی $ax+by+c=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

ضریب x و y در معادلهٔ خط

پاسخ تشریحی **گام اول**: شیب دو ضلع مجاور مستطیل را به دست می‌آوریم:

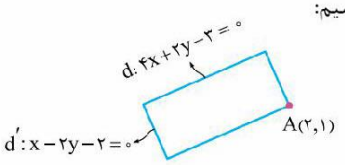
- $x - my = ۲ \Rightarrow my = x - ۲ \xrightarrow{\div m} y = \frac{۱}{m}x - \frac{۲}{m} \Rightarrow$ شیب $= \frac{۱}{m}$
- $۲mx + my = ۳ \Rightarrow my = -۲mx + ۳ \xrightarrow{\div m} y = -۲x + \frac{۳}{m} \Rightarrow$ شیب $= -۲$

چون دو ضلع مجاور بر هم عمودند، پس شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است؛ درنتیجه: $m = ۲$.

گام دوم: با جای‌گذاری $m = ۲$، معادلهٔ دو ضلع مستطیل به صورت مقابل می‌شوند:

$$\begin{cases} x - my = ۲ \xrightarrow{m=۲} x - ۲y - ۲ = ۰ \\ ۲mx + my = ۳ \xrightarrow{m=۲} ۴x + ۲y - ۳ = ۰ \end{cases}$$

نقطهٔ $(۲,۱)$ در هیچ‌کدام صدق نمی‌کند، پس روی هیچ‌کدام نیست. شکل تقریبی مستطیل را می‌کشیم:



گام سوم: فاصلهٔ A تا d و d′، طول و عرض مستطیل را به ما می‌دهد:

$$\text{طول} = \text{فاصلهٔ A تا d} = \frac{|۴(۲) + ۲(۱) - ۳|}{\sqrt{۴^۲ + ۲^۲}} = \frac{۷}{\sqrt{۲۰}}$$

$$\text{عرض} = \text{فاصلهٔ A تا d}' = \frac{|۲ - ۲(۱) - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

گام چهارم: مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = \frac{۷}{\sqrt{۲۰}} \times \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۴}{۱۰} = ۱/۴$$

تست و پاسخ 8

قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,k)$ نسبت به خط $x + y = ۲$، روی محور عرض‌ها است. k کدام است؟

طولش صفر است.

۱) $k \in \mathbb{R}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از A به خط $x + y = ۲$ عمود کنید. بعد خط جدید را با خط $x + y = ۲$ قطع دهید. نقطهٔ به‌دست‌آمده، وسط پاره‌خط AA' است.

درس‌نامه قرینهٔ نقطه نسبت به خط

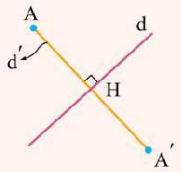
می‌خواهیم قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_B)$ را نسبت به خط d به معادلهٔ $y = mx + h$ به دست آوریم.

گام اول: از نقطهٔ A خطی به شیب $\frac{-۱}{m}$ بر خط d عمود می‌کنیم.

گام دوم: خط d و d′ (خط عمودی که در گام اول نوشتیم) را قطع می‌دهیم تا نقطهٔ H به دست آید.

گام سوم: H وسط A و A′ است، پس:

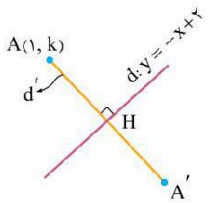
$$H = \frac{A + A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲H - A$$



پاسخ تشریحی **گام اول**: شیب d برابر با -۱ است، پس شیب d′ که بر آن عمود است باید ۱ باشد.

معادلهٔ خط d′ را با داشتن نقطهٔ $A(۱,k)$ و شیبش $m = ۱$ می‌نویسیم:

$$y - k = ۱(x - ۱) \Rightarrow y = x + k - ۱$$



گام دوم: دو خط d و d' را قطع می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} d: y=-x+۲ \\ d': y=x+k-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow -x+۲=x+k-۱ \Rightarrow ۲x=۳-k \Rightarrow x=\frac{۳-k}{۲}$$

با جای‌گذاری $x=\frac{۳-k}{۲}$ در معادلهٔ d، عرض نقطهٔ تقاطع را پیدا می‌کنیم:

$$y=-x+۲ \xrightarrow{x_H=\frac{۳-k}{۲}} y_H=\frac{-۳+k}{۲}+۲=\frac{k+۱}{۲}$$

پس:

$$H(\frac{۳-k}{۲},\frac{k+۱}{۲})$$

گام سوم: نقطه II وسط A و A' است، پس:

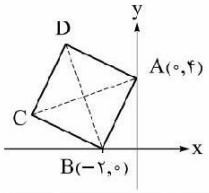
$$II=\frac{A+A'}{۲} \Rightarrow A'=۲II-A \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=۲x_{II}-x_A=۲(\frac{۳-k}{۲})-۱=۲-k \\ y_{A'}=۲y_H-y_A=۲(\frac{k+۱}{۲})-k=۱ \end{cases} \Rightarrow A'(۲-k,۱)$$

گام چهارم: می‌خواهیم $A'(۲-k,۱)$ روی محور عرض‌ها باشد، پس طولش باید صفر باشد:

$$۲-k=۰ \Rightarrow k=۲$$

تست و پاسخ 9

در شکل زیر، چهارضلعی ABCD یک مربع است. مجموع مختصات رأس D کدام است؟



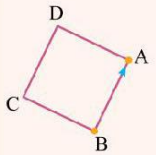
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره شبیه این سؤال در کنکور دی ماه ۱۴۰۱ رشتهٔ ریاضی آمده بود!

خودت حل کنی بهتره از D به محور yها عمود کنید و از همنهشتی مثلث‌ها کمک بگیرید.

درس نامه رئوس مربع به شکل برداری



در مربع $ABCD$، اگر دو رأس مجاور را داشته باشیم، به صورت برداری می‌توانیم دو رأس دیگر را با محاسبات کم پیدا کنیم.

فرض کنید رئوس A و B داریم:

گام اول: مختصات بردار $\overrightarrow{BA}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B$$

گام دوم: فرض کنید بردار $\overrightarrow{BA}$ به صورت (α,β) است.

بردار $\overrightarrow{AD}$ بر آن عمود است و مختصاتش به صورت $(\beta,-\alpha)$ یا $(-\beta,\alpha)$ است (باید از روی شکل بفهمیم که کدام است).

گام سوم: مختصات رأس D را به دست می‌آوریم:

$$D=A+\overrightarrow{AD}$$

گام چهارم: حالا که D را داریم، بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر قرار می‌دهیم تا C به دست آید:

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow A-B=D-C \Rightarrow C=D-A+B$$

پاسخ تشریحی راه اول:

گام اول: مختصات بردار $\overrightarrow{BA}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\text{بردار}=\text{انتها}-\text{ابتدا} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=A-B=\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$$

گام دوم: بردار $\overrightarrow{AD}$ یا به صورت $\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}$ یا به صورت $\begin{bmatrix}۴\\-۲\end{bmatrix}$ است.

طبق شکل، چون از A به D افزایش y داشتیم، پس مولفهٔ y باید مثبت باشد و $\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}$ قبول است.

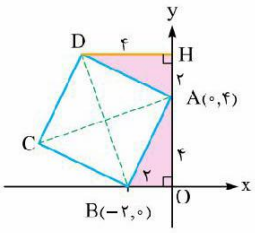
گام سوم: بردار $\overrightarrow{AD}$ و رأس A را داریم، رأس D را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AD} = D - A \Rightarrow D = \overrightarrow{AD} + A = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

گام چهارم: مجموع طول و عرض نقطهٔ D برابر است با:

$$x_D + y_D = -۴ + ۶ = ۲$$

راه دوم:



گام اول: از D به محور yها عمود کنید و از همنهشتی مثلث‌ها استفاده کنید:

دو مثلث AHD و BOA بنا به حالت وتر و یک زاویهٔ تند با هم همنهشت هستند، پس:

$$\begin{cases} AH = BO = ۲ \\ DH = AO = ۴ \end{cases}$$

- از H، ۴تا به سمت چپ برویم به D می‌رسیم، پس: $x_D = -۴$
- از A، ۲تا به بالا برویم به D می‌رسیم، پس: $y_D = ۴ + ۲ = ۶$

گام دوم: پس مختصات D به صورت $(-۴,۶)$ است و مجموع طول و عرضش برابر با ۲ است.

تست و پاسخ 10

سه نقطهٔ $A(۰,۱)$ ، $B(۴,۱)$ و $C(۰,۲)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. اگر نیمساز بزرگ‌ترین زاویهٔ این مثلث، ضلع روبه‌روی خود را در $D(\alpha,\beta)$ قطع کند، $\alpha + \beta$ کدام است؟

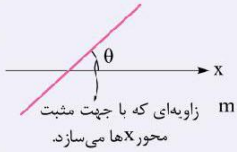
۱) ۲/۵ ۲) ۲/۶ ۳) ۲ ۴) ۲/۸

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره برای یک سری از سؤالات هندسهٔ تحلیلی، رسم یک شکل تقریبی کافی است، ولی اگر سؤال بدقلق بود و به راحتی حل نمی‌شد، حتماً شکل دقیق برایش بکشید.

خودت حل کنی بهتره شکل دقیق رسم کنید.

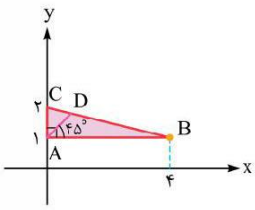
نکته تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر با شیب خط است.



$m = \tan\theta$

پاسخ تشریحی **گام اول:** نقاط $A(۰,۱)$ ، $B(۴,۱)$ و $C(۰,۲)$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم.

نیمساز زاویهٔ A را هم رسم می‌کنیم.



گام دوم: از خط AD، نقطهٔ $A(۰,۱)$ و شیبش $(m = \tan ۴۵^\circ = ۱)$ را داریم.

عرض از مبدأ

معادله‌اش را می‌نویسیم:

$$y = mx + h \xrightarrow[h=۱]{m=۱} y = x + ۱$$

گام سوم: معادلهٔ BC را می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۲-۱}{۰-۴} = -\frac{۱}{۴}$$

$$y = mx + h \Rightarrow y = \frac{-۱}{۴}x + ۲$$

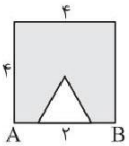
گام چهارم: دو خط BC و AD را قطع می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید:

$$y_{BC} = y_{AD} \Rightarrow \frac{-۱}{۴}x + ۲ = x + ۱ \xrightarrow{\times ۴} -x + ۸ = ۴x + ۴ \Rightarrow ۵x = ۴ \Rightarrow x = ۰/۸$$

با جای‌گذاری $x = ۰/۸$ در $y = x + ۱$، داریم: $y = ۱/۸$

گام پنجم: پس مختصات D به صورت $(\underbrace{۰/۸}_{\alpha},\underbrace{۱/۸}_{\beta})$ است؛ درنتیجه:

$$\alpha + \beta = ۰/۸ + ۱/۸ = ۲/۶$$



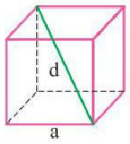
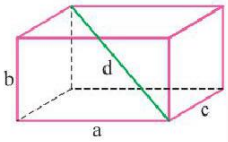
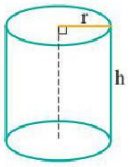
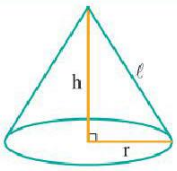
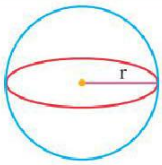
مطابق شکل، سطح تیره‌شده را حول AB دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند برابر π است؟ (مثلث متساوی‌الاضلاع است.)

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۰ ۴) ۶۳

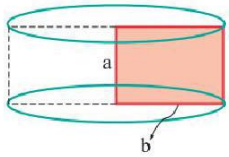
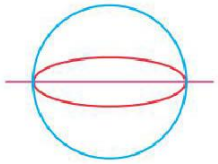
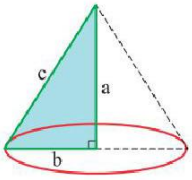
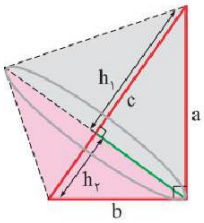
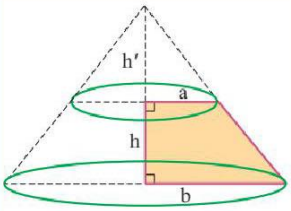
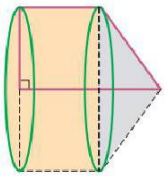
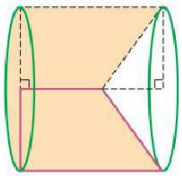
پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از یک استوانه، ۲تا مخروط باید در بیاورید.

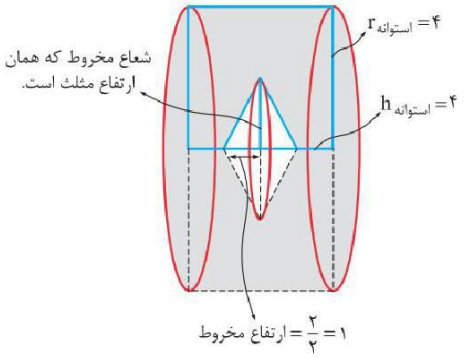
درس نامه ۱. حجم، مساحت جانبی و مساحت کل اشکال مهم

	شکل		حجم	مساحت جانبی	مساحت کل	سایر روابط
۱	مکعب		a^3	$4a^2$	$6a^2$	$d = a\sqrt{3}$
۲	مکعب‌مستطیل		abc	$2(ab+bc)$	$2(ab+bc+ca)$	$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
۳	استوانهٔ قائم		$\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi rh+2\pi r^2$	
۴	منشور قائم		$S_{\text{قاعده}} \times h$	$P_{\text{قاعده}} \times h$	$S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}}$	
۵	مخروط قائم		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r\ell$	$\pi r\ell+\pi r^2$	$\ell^2=r^2+h^2$
۶	هرم		$\frac{1}{3}S_{\text{قاعده}} \times h$	مجموع مساحت مثلث‌های دور شکل	$S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}}$	
۷	کره		$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$		

درس‌نامه ۲. شکل‌های حاصل از دوران

دوران	شکل حاصل	توضیح
دوران مستطیل حول یک ضلع (a)		استوانه‌ای به شعاع b و ارتفاع a
دایره یا نیم‌دایره‌ای به شعاع r حول قطرش		کره‌ای به شعاع r
مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم (a)		مخروطی به شعاع b و ارتفاع a
مثلث قائم‌الزاویه حول وترش (c)		دو مخروط که از قاعده به هم چسبیده‌اند: • شعاع هر دو، همان ارتفاع وارد بر وتر است: $r = \frac{ab}{c}$ • مجموع ارتفاع‌هایشان همان وتر است. • مجموع حجم دو مخروط: $\frac{1}{3}\pi(\frac{ab}{c})^2 c = \frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}$
ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ارتفاعش		مخروطی که یک مخروط از بالای آن برداشته شده است. برای به دست آوردن h'، تالس می‌نویسیم: $\frac{h'}{h'+h} = \frac{a}{b}$ $V = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$
ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول قاعدهٔ بزرگش		$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}}$
ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول قاعدهٔ کوچکش		$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}}$

پاسخ تشریحی **گام اول**: از دوران سطح رنگی حول AB، شکل مقابل به وجود می‌آید:



گام دوم: ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر ضلع آن است، پس:

$$r_{\text{مخروط}} = h_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \text{ضلع} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳}$$

گام سوم: حجم استوانه و دو مخروط را حساب می‌کنیم:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi (۴)^۲ (۴) = ۶۴\pi$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi (\sqrt{۳})^۲ (۱) = \pi$$

گام چهارم: برای به دست آوردن حجم قسمت مطلوب باید حجم استوانه را منهای حجم دوتا مخروط کنیم:

$$V_{\text{مطلوب}} = V_{\text{استوانه}} - ۲V_{\text{مخروط}} = ۶۴\pi - ۲(\pi) = ۶۲\pi \rightarrow$$ ۶۲ برابر π است.

تست و پاسخ 12

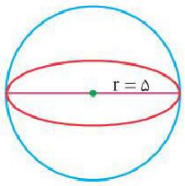
دایره‌ای به شعاع ۵ را حول یکی از قطرهایش دوران می‌دهیم و شکل حاصل از دوران را با صفحه‌ای به فاصلهٔ ۲ از مرکز دایره برش می‌زنیم. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت دایره است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۳۶ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۶

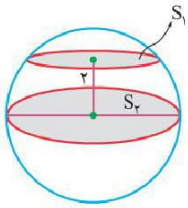
پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از مرکز کره به مرکز مقطع حاصل و نقطهٔ برخورد مقطع با سطح کره وصل کنید. در این مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ فیثاغورس بنویسید.

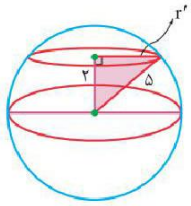
پاسخ تشریحی **گام اول**: از دوران دایره‌ای به شعاع r، حول قطرش، یک کره به شعاع ۵ داریم:



گام دوم: با صفحه‌ای با فاصلهٔ ۲ از مرکز دایره، کره را برش می‌زنیم. مقطع حاصل یک دایره است.



گام سوم: در مثلث رنگ‌شده، رابطهٔ فیثاغورس می‌نویسیم تا شعاع دایره به دست آید:



$$(r')^۲ + ۲^۲ = ۵^۲ \Rightarrow r' = \sqrt{۲۱}$$

گام چهارم: مساحت دایره به شعاع $\sqrt{۲۱}$ برابر است با:

$$S_۱ = \pi r'^۲ = \pi(\sqrt{۲۱})^۲ = ۲۱\pi$$

مساحت دایره به شعاع ۵ برابر است با:

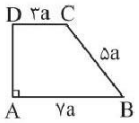
$$S_۲ = \pi r^۲ = \pi(۵)^۲ = ۲۵\pi$$

گام پنجم: نسبت $S_۱$ به $S_۲$ برابر است با:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۲۱\pi}{۲۵\pi} = \frac{۲۱\times ۴}{۲۵\times ۴} = ۰/۸۴$$

تست و پاسخ 13

حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD حول AD چند برابر $\pi a^۳$ است؟

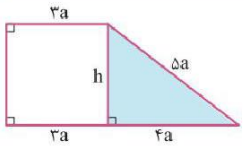


۱) ۷۹ ۲) ۷۵ ۳) ۷۲ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینه ۱

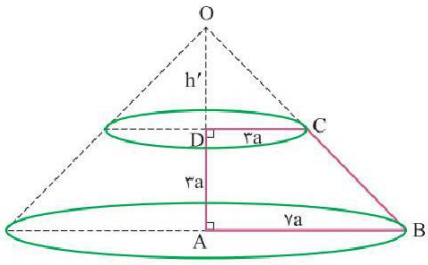
خودت حل کنی بهتره یک مخروط که یک مخروط از بالای آن برداشته شده، به وجود می‌آید. از تالس هم باید استفاده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در مثلث رنگی به کمک رابطهٔ فیثاغورس، ارتفاع ذوزنقه را حساب می‌کنیم:



$$h^۲ + (۴a)^۲ = (۵a)^۲ \Rightarrow h^۲ = ۹a^۲ \Rightarrow h = ۳a$$

گام دوم: از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ارتفاعش، یک مخروط بی‌کله! به وجود می‌آید:



گام سوم: در مثلث OAB، تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم:

$$DC \parallel AB \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{h'}{h'+۳a} = \frac{۳\cancel{a}}{۷\cancel{a}} \Rightarrow ۷h' = ۳h' + ۹a \Rightarrow h' = \frac{۹}{۴}a$$

گام چهارم: حجم مخروط بزرگ را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{شعاع} = ۷a \\ \text{ارتفاع} = ۳a + \frac{۹}{۴}a = \frac{۲۱}{۴}a \end{array}\right\} \Rightarrow V_۱ = \frac{\pi}{۳}r^۲h = \frac{\pi}{۳}(۷a)^۲(\frac{۲۱}{۴}a) = \frac{۳۴۳}{۴}\pi a^۳$$

حجم مخروط کوچک که در بالای شکل قرار دارد را حساب می‌کنیم:

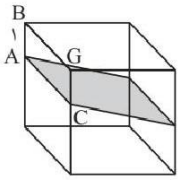
$$\left.\begin{array}{l} \text{شعاع} = ۳a \\ \text{ارتفاع} = h' = \frac{۹}{۴}a \end{array}\right\} \Rightarrow V_۲ = \frac{\pi}{۳}r^۲h = \frac{\pi}{۳}(۳a)^۲(\frac{۹}{۴}a) = \frac{۲۷}{۴}\pi a^۳$$

گام پنجم: اختلاف دو حجم بالا، حجم مخروط ناقص را به ما می‌دهد:

$$V_{\text{مطلوب}} = V_۱ - V_۲ = \frac{۳۴۳}{۴}\pi a^۳ - \frac{۲۷}{۴}\pi a^۳ = \frac{۳۱۶}{۴}\pi a^۳ = ۷۹\pi a^۳$$

تست و پاسخ 14

یک صفحهٔ مایل مطابق شکل، مکعبی به ضلع ۸ را طوری قطع کرده که مساحت مقطع برابر ۸۰ و AC موازی BG است. اگر AB = ۱ ، آن‌گاه حجم قسمتی از مکعب که پایین صفحه قرار می‌گیرد، کدام است؟

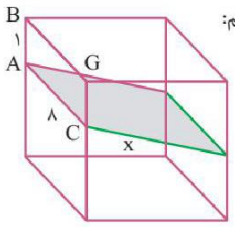


۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶
۳) ۳۸۴ ۴) ۴۴۸

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره باید از فیثاغورس یک بار استفاده کنید. در ضمن شکلی که باید حجمش را حساب کنید یک منشور است.

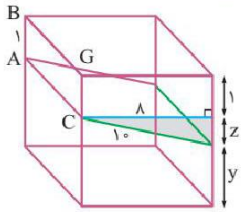
پاسخ تشریحی **گام اول**: مقطع رنگی یک مستطیل به مساحت ۸۰ است. طول ضلع دیگر آن را حساب می‌کنیم:



$$۸x = ۸۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

گام دوم:

در مثلث رنگ‌شده به کمک رابطهٔ فیثاغورس، z را به دست می‌آوریم:

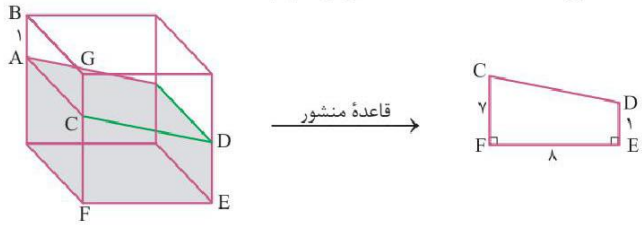


$$۸^۲ + z^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow z = ۶$$

در یال سمت راست، داریم:

$$۱ + z + y = ۸ \xrightarrow{z=۶} y = ۱$$

گام سوم: قسمتی که باید حجمش را حساب کنیم یک منشور با قاعدهٔ ذوزنقه است که همهٔ اضلاعش را داریم:



گام چهارم: مساحت قاعده (یعنی ذوزنقه) را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{قاعدهٔ ب} + \text{قاعدهٔ ک})}{۲} = \frac{(۱+۷)\times ۸}{۲} = ۳۲$$

گام پنجم: حجم منشور برابر است با:

$$V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعده}} \times h = ۳۲ \times ۸ = ۲۵۶$$

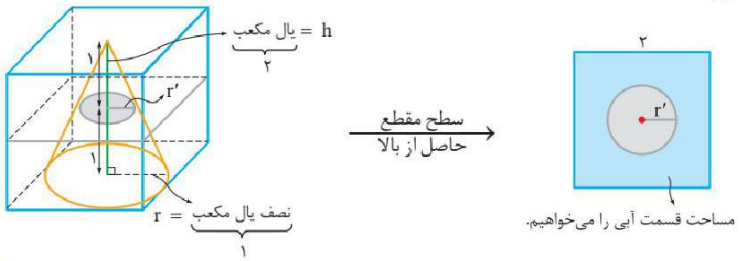
تست و پاسخ 15

از درون مکعب توپُری به ابعاد ۲، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن که قاعدهٔ آن روی یکی از وجوه مکعب قرار دارد را بیرون می‌آوریم. سطح مقطع جسم باقی‌مانده با صفحه‌ای که از وسط محور مخروط، موازی با قاعدهٔ آن می‌گذرد، کدام است؟ ($\pi \simeq ۳/۱۴$)

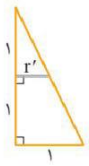
۱) ۳/۲۱۵ ۲) ۳/۴۱۵ ۳) ۳/۵۱۵ ۴) ۳/۶۱۵

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول**: شکل مناسب رسم می‌کنیم:



گام دوم: r' را به کمک تالس حساب می‌کنیم:



$$\frac{۱}{۱+۱} = \frac{r'}{۱} \Rightarrow r' = \frac{۱}{۲}$$

گام سوم: مساحت قسمت آبی‌رنگ (گام اول) را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{آبی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = ۲^۲ - \pi(\frac{۱}{۲})^۲ = ۴ - \frac{\pi}{۴} \simeq ۴ - \frac{۳/۱۴}{۴} = ۴ - ۰/۷۸۵ = ۳/۲۱۵$$

تست و پاسخ 16

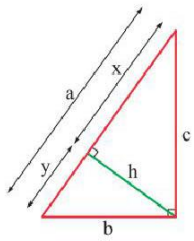
از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن دو مخروط با قاعده‌های مشترک به وجود می‌آید که حجم یکی دو برابر دیگری است. اگر مساحت این قاعدهٔ مشترک برابر 36π باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ ۲) $9\sqrt{2}$ ۳) $27\sqrt{2}$ ۴) $\frac{27}{2}\sqrt{2}$

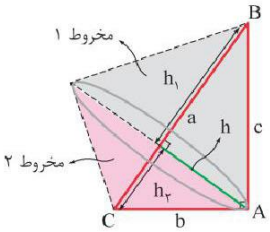
پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ جداشده روی وتر است.

نکته چند رابطه در مثلث قائم‌الزاویه

۱	ارتفاع وارد بر وتر	$h=\frac{b.c}{a}$	
۲	ارتفاع وارد بر وتر	$h^2=x.y$	
۳	تصویر اضلاع قائمه روی وتر	$c^2=x.a$ $b^2=y.a$	

پاسخ تشریحی **گام اول**: شکل رسم می‌کنیم:



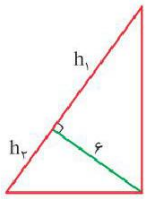
گام دوم: مساحت قاعده، 36π است؛ پس:

$$\pi h^2=36\pi \Rightarrow \underset{\text{ارتفاع وارد بروتر}}{h}=6$$

گام سوم: حجم مخروط ۱، دو برابر حجم مخروط ۲ است؛ پس:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} \Rightarrow 2=\frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_1=2h_2$$

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر جدا می‌کند:



$$6^2=\underbrace{h_1}_{2h_2}\times h_2 \Rightarrow 36=2h_2^2 \Rightarrow h_2=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

گام پنجم:

- اندازهٔ وتر مثلث را حساب می‌کنیم:

$$h_1+h_2=3h_2=3(3\sqrt{2})=9\sqrt{2}$$

- مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{\text{ارتفاع‌وارد بروتر}\times\text{وتر}}{2}=\frac{9\sqrt{2}\times 6}{2}=27\sqrt{2}$$

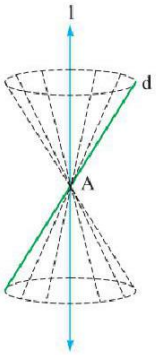
تست و پاسخ 17

صفحه‌ای تمام مولدهای یک سطح مخروطی را قطع کرده است، مقطع حاصل چه تعداد از شکل‌های دایره، بیضی و سهمی می‌تواند باشد؟

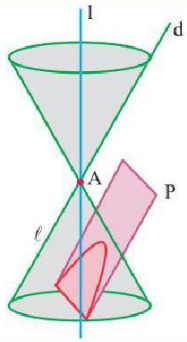
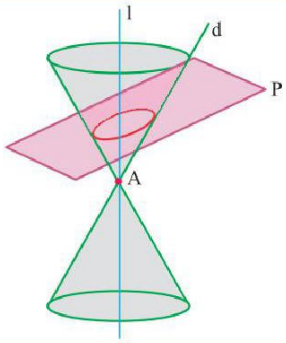
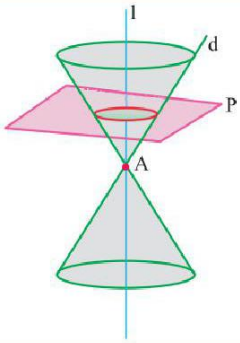
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** منظور از مولدهای یک سطح مخروطی، خط‌های سبز شکل مقابل هستند.



گام دوم: مقطع حاصل از صفحه‌ای که قرار است تمام مولدها را قطع کند، می‌تواند دایره و بیضی باشد:

سهمی	بیضی	دایره
		
صفحهٔ p با مولد ℓ موازی است و آن را قطع نمی‌کند.	صفحهٔ p، تمام مولدها را قطع کرده است.	صفحهٔ p، تمام مولدها را قطع کرده است.

تست و پاسخ 18

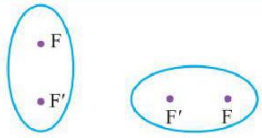
مجموع فواصل نقطهٔ متغیر M از نقاط $(۶,-۱)$ و $(-۲,-۱)$ برابر ۱۰ است. بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ M از محور xها کدام است؟

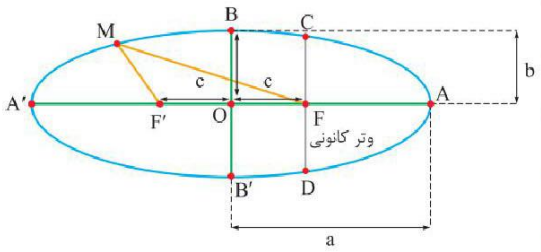
۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره M روی یک بیضی به کانون‌های $(۶,-۱)$ و $(-۲,-۱)$ است.

درس نامه بیضی

تعریف	مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از $\underbrace{\text{دو نقطهٔ ثابت}}_{\text{کانون‌ها}}$ واقع در صفحه، $\underbrace{\text{مقداری ثابت}}_{۲a}$ است: $MF+MF'=۲a$
انواع بیضی	 بیضی قائم — بیضی افقی

کانون‌ها	F و F'	
مرکز بیضی	O (نقطهٔ وسط F و F')	
رئوس کانونی	A و A'	
رئوس ناکانونی	B و B'	
قطرهای بیضی	قطر بزرگ $= ۲a$، قطر کوچک $= ۲b$	
فاصلهٔ کانونی	$FF' = ۲c$	
رابطهٔ بین a، b و c	$a^۲ = b^۲ + c^۲$	
وتر کانونی	$CD = \frac{۲b^۲}{a}$	
خروج از مرکز	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$	$\underset{\text{شبیه‌دایره}}{۰} < e < \underset{\text{شبیه‌پاره‌خط}}{۱}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به تعریف بیضی، نتیجه می‌گیریم M روی یک بیضی با کانون‌های $F(۶,-۱), F'(-۲,-۱)$ و با ثابت $\underbrace{۲a = ۱۰}_{a=۵}$ قرار دارد.

گام دوم: مرکز بیضی، وسط F و F' است:

$$O = (\frac{x_F + x_{F'}}{۲}, \frac{y_F + y_{F'}}{۲}) = (\frac{-۲+۶}{۲}, \frac{-۱+(-۱)}{۲}) = (۲,-۱)$$

گام سوم: چون عرض کانون‌ها یکسان است؛ پس بیضی افقی است.

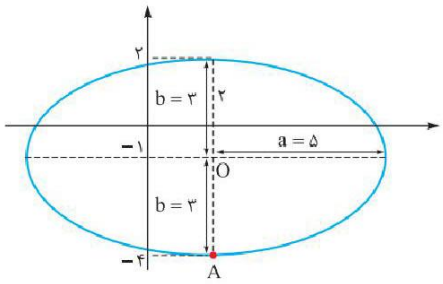
فاصلهٔ دو کانون، برابر با $۲c$ است:

$$۲c = ۶ - (-۲) \Rightarrow c = ۴$$

گام چهارم: با داشتن $a = ۵$ و $c = ۴$، b را حساب می‌کنیم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۵^۲ = b^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b = ۳$$

گام پنجم: با داشتن مرکز بیضی افقی و $a = ۵$ و $b = ۳$، شکل بیضی را می‌کشیم:



گام ششم: از بین نقاط روی بیضی، نقطهٔ A بیشترین فاصله را تا محور xها دارد که ۴ واحد است:

$$|y_A| = |-۴| = ۴$$

تست و پاسخ 19

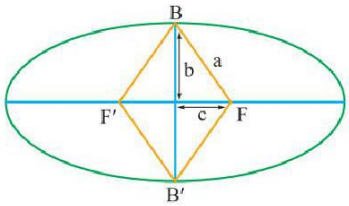
اگر کانون‌ها و دو سر قطر کوچک یک بیضی را به هم وصل کنیم، یک چهارضلعی با محیط ۲۰ و مساحت ۲۴ تشکیل می‌شود. خروج از مرکز بیضی کشیده‌تر کدام است؟

بیضی‌ای که b کوچک‌تری دارد.

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل مناسب می‌کشیم:



گام دوم: محیط لوزی $BFB'F'$ برابر با ۲۰ است، پس:

$$۴a = ۲۰ \Rightarrow a = ۵$$

گام سوم: مساحت لوزی $BFB'F'$ برابر با ۲۴ است، پس:

$$\frac{(۲b)(۲c)}{۲} = ۲۴ \Rightarrow bc = ۱۲$$

گام چهارم:

- با توجه به رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ و $a = ۵$، داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲۵$$

- طرفین رابطهٔ $bc = ۱۲$ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲bc = ۲۴$$

- طرفین دو رابطهٔ بالا را جمع می‌زنیم:

$$(b+c)^۲ = ۴۹ \Rightarrow b + c = ۷$$

گام پنجم: از $b + c = ۷$ و $bc = ۱۲$ به یکی از دو حالت روبه‌رو می‌رسیم:

$$\begin{cases} (۱)\ b = ۴\ ,\ c = ۳ \\ (۲)\ b = ۳\ ,\ c = ۴ \end{cases}$$

هر چه b کوچک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر می‌شود، پس حالت ۲ قبول است.

گام ششم: خروج از مرکز برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

تست و پاسخ 20

پاره‌خط واصل دو کانون یک بیضی، از هر سر قطر کوچک آن با زاویهٔ ۱۵۰° رؤیت می‌شود. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

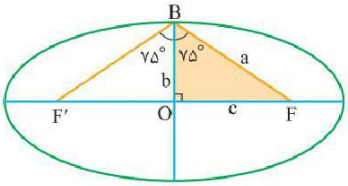
۱) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره زاویهٔ بین پاره‌خط‌هایی که از رأس بالایی به کانون‌ها وصل می‌شود، ۱۵۰° است.

نکته $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲ \alpha - ۱$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از سر قطر کوچک بیضی به دو کانون وصل می‌کنیم. زاویهٔ ایجادشده ۱۵۰° است.



گام دوم: خروج از مرکز $e = \frac{c}{a}$ است. در مثلث OBF، نسبت $\frac{c}{a}$ همان $\sin(O\hat{B}F)$ است: $\sin(O\hat{B}F) = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin ۷۵^\circ = e$

گام سوم: $\sin ۷۵^\circ$ با $\cos ۱۵^\circ$ برابر است. از اتحاد $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲ \alpha - ۱$ استفاده می‌کنیم و جای α، ۱۵° قرار می‌دهیم:

$$\cos ۳۰^\circ = ۲\cos^۲ ۱۵^\circ - ۱ \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \sqrt{\frac{\cos ۳۰^\circ + ۱}{۲}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۱}{۲}} = \sqrt{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

پس:

$$e = \sin ۷۵^\circ = \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

تست و پاسخ 21

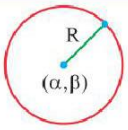
دایره به مرکز (۴,۰) و مماس بر نیمساز ربع اول، خط $y=-2$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $4+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $4+\sqrt{2}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

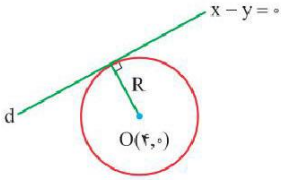
خودت حل کنی بهتره فاصلهٔ مرکز تا خط مماس = شعاع

درس نامه دایره

تعریف دایره	مجموعه نقاطی از صفحه که از $\underbrace{\text{نقطهٔ ثابتی}}_{\text{مرکز دایره}}$ به $\underbrace{\text{فاصلهٔ یکسانی}}_{\text{شعاع}}$ قرار دارند.
معادلهٔ دایره	$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ 

نکته فاصلهٔ نقطهٔ (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

پاسخ تشریحی **گام اول**: شکل فرضی می‌کشیم:



گام دوم: فاصلهٔ $O(4,0)$ تا خط $x-y=0$ برابر با شعاع دایره است:

$$r=\frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

گام سوم: معادلهٔ دایره را با داشتن $\underbrace{\text{مرکز}}_{(4,0)}$ و $\underbrace{\text{شعاعش}}_{2\sqrt{2}}$ می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\Rightarrow(x-4)^2+(y-0)^2=(2\sqrt{2})^2\Rightarrow(x-4)^2+y^2=8$$

گام چهارم: دایره را با خط $y=-2$ قطع می‌دهیم:

$$(x-4)^2+y^2=8\xrightarrow{y=-2}(x-4)^2+4=8\Rightarrow(x-4)^2=4\Rightarrow|x-4|=2\Rightarrow\begin{cases}x-4=2\Rightarrow x=6\\x-4=-2\Rightarrow x=2\end{cases}$$

تست و پاسخ 22

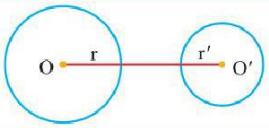
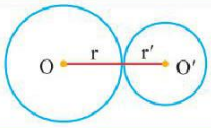
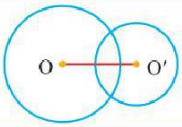
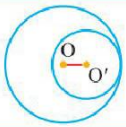
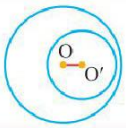
دایرهٔ C' در درون دایرهٔ C با مرکز $(1,-1)$ بر آن مماس است. اگر طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۲ و مساحت محدود بین دو دایره برابر 16π باشد، معادلهٔ دایرهٔ C کدام است؟

۱) $x^2-2x+y^2+2y=7$ ۲) $x^2+y^2-2x-2y=23$ ۳) $x^2+2x+y^2+2y=7$ ۴) $x^2-2x+y^2+2y=23$

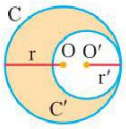
پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره وقتی دو دایره مماس‌درون باشند، باید $d=r-r'$ باشد.

درس‌نامه وضعیت دو دایره نسبت به هم

	وضعیت دو دایره	رابطهٔ بین شعاع‌ها و خط‌المرکزین $OO'=d$	شکل
۱	متخارج	$d > r + r'$	
۲	مماس‌برون	$d = r + r'$	
۳	متقاطع	$\lvert r - r' \rvert < d < r + r'$	
۴	مماس‌درون	$d = \lvert r - r' \rvert$	
۵	متداخل	$d < \lvert r - r' \rvert$	
۶	هم‌مرکز	$d = 0$	

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو دایرهٔ مماس‌داخل $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ به شکل مقابل داریم:



گام دوم: طول خط‌المرکزین ۲ است؛ پس: $d = r - r' \Rightarrow 2 = r - r'$

گام سوم: مساحت قسمت رنگی 16π است؛ پس:

$$\pi r^2 - \pi r'^2 = 16\pi \xrightarrow{\div \pi} r^2 - r'^2 = 16 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(r - r')}_{2}(r + r') = 16 \Rightarrow r + r' = 8$$

گام چهارم: از حل دو معادلهٔ $r - r' = 2$ و $r + r' = 8$، داریم: $r' = 3 \ , \ r = 5$

گام پنجم: معادلهٔ دایرهٔ C به مرکز $(1,-1)$ و شعاع $r = 5$ را می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 25 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y = 23$$

تست و پاسخ 23

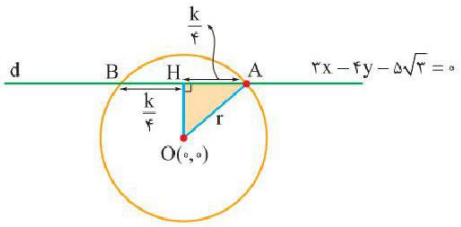
خط $3x - 4y = 5\sqrt{3}$ وتری به طول $\frac{k}{2}$ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = k$ جدا می‌کند. اختلاف مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۱۶ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره شکل فرضی بکشید و از مرکز به وسط وتر و یک سر وتر وصل کنید. سپس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجادشده، فیثاغورس بنویسید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای مسئله شکل مناسب می‌کشیم:

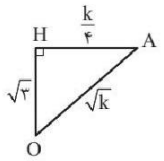


گام دوم: فاصلهٔ $O(۰,۰)$ تا خط $۳x - ۴y - ۵\sqrt{۳} = ۰$، همان OH است.

$$OH = \frac{|۳(۰) - ۴(۰) - ۵\sqrt{۳}|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۵} = \sqrt{۳}$$

گام سوم: با توجه به معادلهٔ دایره که به صورت $x^۲ + y^۲ = \underbrace{k}_{r^۲}$ است، مرکز دایره $(۰,۰)$ و شعاعش $\sqrt{k}$ است.

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی، رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$(\frac{k}{۴})^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = (\sqrt{k})^۲ \Rightarrow \frac{k^۲}{۱۶} + ۳ = k \xrightarrow{\times ۱۶} k^۲ - ۱۶k + ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (k - ۱۲)(k - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k_۱ = ۱۲ \\ k_۲ = ۴ \end{cases}$$

گام پنجم: اختلاف مقادیر ممکن برای k برابر است با:

$$k_۱ - k_۲ = ۱۲ - ۴ = ۸$$

تست و پاسخ 24

تمام خط‌هایی که سطح دایره‌ای به معادلهٔ $ax^۲ + ۲y^۲ + bx + cy = ۰$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، از نقطهٔ $(-۱,۲)$ می‌گذرند. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره تمام قطرهای دایره از مرکز دایره می‌گذرند.

نکات ۱ در معادلهٔ دایره، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر باشد.

۲ در معادلهٔ دایره، اگر از جملاتی که x دارند، مشتق بگیریم و ریشهٔ آن را حساب کنیم، طول نقطهٔ مرکز دایره به دست می‌آید.

در معادلهٔ دایره، اگر از جملاتی که y دارند، مشتق بگیریم و ریشهٔ آن را حساب کنیم، عرض نقطهٔ مرکز دایره به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** خط‌هایی که سطح دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، همان قطرهای دایره‌اند.

تمام قطرهای دایره از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطهٔ $(-۱,۲)$، مرکز دایره است.

گام دوم: طبق نکتهٔ ۱، باید ضریب $x^۲$ و $y^۲$ یکسان باشد: $a = ۲$

تا این‌جا، معادله به صورت $۲x^۲ + ۲y^۲ + bx + cy = ۰$ شد.

گام سوم:

از جملاتی که x دارند (یعنی $۲x^۲ + bx$) مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم: $۴x + b = ۰ \Rightarrow x_۰ = \frac{-b}{۴}$

از جملاتی که y دارند (یعنی $۲y^۲ + cy$) مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم: $۴y + c = ۰ \Rightarrow y_۰ = \frac{-c}{۴}$

پس مختصات مرکز دایره به صورت $(\frac{-b}{۴},\frac{-c}{۴})$ درمی‌آید که با توجه به گام اول باید نقطهٔ $(-۱,۲)$ باشد؛ پس:

$$(\frac{-b}{۴},\frac{-c}{۴})=(-۱,۲)\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b}{۴}=-۱\Rightarrow b=۴\\ \frac{-c}{۴}=۲\Rightarrow c=-۸\end{cases}$$

گام چهارم: معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد درمی‌آوریم:

$$۲x^۲+۲y^۲+۴x-۸y=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۲+۲x\underset{\text{مربع نصف ضریب x}}{+۱}+y^۲-۴y\underset{\text{مربع نصف ضریب y}}{+۴}=۱+۴\Rightarrow(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۵$$

پس:

$$r^۲=۵\Rightarrow r=\sqrt{۵}$$

تست و پاسخ 25

دایرهٔ گذرنده از مبدأ مختصات و دو نقطهٔ (۲,۰) و (۰,۴) را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر این دایره در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲y+x=۰$ ۲) $y+۲x=۰$ ۳) $۳y+x=۰$ ۴) $y+۳x=۰$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+cx+dy+e=۰$ در نظر بگیرید و سه نقطهٔ داده‌شده را در آن قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+y^۲+cx+dy+e=۰$ است.

سه نقطه از دایره را داریم. آن‌ها را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$O(۰,۰)\in$ دایره $\Rightarrow e=۰$

$A(۲,۰)\in$ دایره $\Rightarrow ۴+۲c=۰\Rightarrow c=-۲$

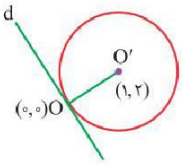
$(۰,۴)\in$ دایره $\Rightarrow ۱۶+۴d=۰\Rightarrow d=-۴$

با جای‌گذاری مقادیر بالا، معادلهٔ دایره به شکل $x^۲-۲x+y^۲-۴y=۰$ درمی‌آید.

گام دوم: معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲-۲x+۱+y^۲-۴y+۴=۱+۴\Rightarrow(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۵$$

گام سوم: خط مماس بر دایره در مبدأ بر شعاع گذرنده از مبدأ، عمود است:



$$m_{oo'}=\frac{۲-۰}{۱-۰}=۲\xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}}m_d=\frac{-۱}{۲}$$

گام چهارم: معادلهٔ خط d را با داشتن $\underbrace{\text{یک نقطه}}_{(۰,۰)}$ و $\underbrace{\text{شیبش}}_{\frac{-۱}{۲}}$ می‌نویسیم:

$$y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۰)\xrightarrow{\times ۲}۲y+x=۰$$

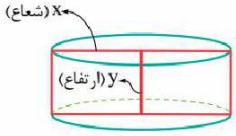
تست و پاسخ 26

طول قطر یک مستطیل برابر با d است. اگر حجم شکل حاصل از دوران این مستطیل حول یکی از ضلع‌هایش، بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}d$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}d$ ۳) $\frac{2}{3}d$ ۴) $\frac{3}{2}d$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول**: طول اضلاع را x و y می‌گیریم. بین اضلاع و قطر، رابطه فیثاغورس برقرار است: $x^2+y^2=d^2 \Rightarrow x=\sqrt{d^2-y^2}$



گام دوم: مستطیل را حول ضلع y دوران می‌دهیم:
یک استوانه به شعاع x و ارتفاع y داریم:

گام سوم: حجم آن را برحسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$V=\pi r^2 h=\pi \underbrace{x^2}_{d^2-y^2} y=\pi(d^2-y^2)y=\pi(d^2y-y^3)$$

گام چهارم: ریشهٔ V' را به دست می‌آوریم:

$$V'=0 \Rightarrow \pi(d^2-3y^2)=0 \Rightarrow y^2=\frac{d^2}{3}$$

گام پنجم: طول ضلع دیگر یعنی x را می‌خواهیم:

$$x=\sqrt{d^2-y^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=\frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}d$$

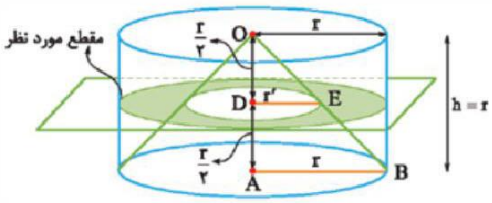
تست و پاسخ 27

از داخل یک استوانهٔ قائم با شعاع قاعده و ارتفاع برابر، بزرگ‌ترین مخروط قائم را جدا کرده و شکل حاصل را با صفحه‌ای موازی با قاعده‌های استوانه و فاصلهٔ برابر از آن‌ها برش می‌زنیم. مساحت مقطع حاصل چند برابر مساحت قاعدهٔ استوانه است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

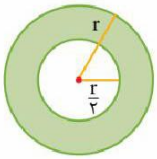
پاسخ تشریحی **گام اول**: شکل می‌کشیم:



گام دوم: در مثلث OAB، تالس می‌نویسیم:

$$DE \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس جزءبه‌کل}} \frac{OD}{OA}=\frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{r}{2}}{r}=\frac{r'}{r} \Rightarrow r'=\frac{r}{2}$$

گام سوم: مقطع حاصل به شکل مقابل است:
نسبت مساحت قسمت رنگی به مساحت قاعده را می‌خواهیم:



$$\frac{\pi r^2-\pi(\frac{r}{2})^2}{\pi r^2}=\frac{\frac{3}{4}\pi r^2}{\pi r^2}=\frac{3}{4}$$

تست و پاسخ 28

زاویه‌های مثلثی با اعداد ۱، ۱ و ۴ متناسب و طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۳ است. حجم حاصل از دوران این مثلث حول این ضلع چند برابر π است؟

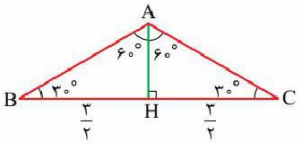
۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** زوایا را x، x و $4x$ می‌گیریم. مجموعشان باید 180° باشد: $6x = 180 \Rightarrow x = 30^\circ$

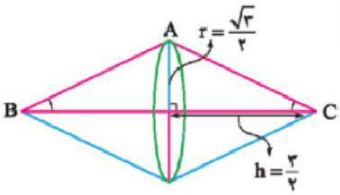
پس زوایای مثلث 30°، 30° و 120° هستند. بزرگ‌ترین ضلع، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 120° است که اندازه‌اش ۳ می‌باشد.

گام دوم: مثلث را می‌کشیم و AH را حساب می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{AHC}: \tan 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{3}{2}}{AH} \Rightarrow AH = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گام سوم: مثلث ABC را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. دو مخروط هم‌قاعده به دست می‌آید:



گام چهارم: حجم یکی از مخروط‌ها را حساب می‌کنیم و ضربدر ۲ می‌کنیم: $V_{\text{کل}} = 2V_{\text{مخروط}} = 2\times\frac{\pi}{3}r^2h = 2\times\frac{\pi}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\pi$

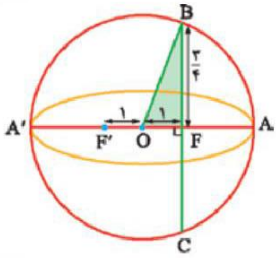
تست و پاسخ 29

دو نقطهٔ A و A' دو سر قطر بزرگ یک بیضی با فاصلهٔ کانونی ۲ و مرکز O است. خطی که در کانون بیضی بر AA' عمود می‌شود، از دایره‌ای به قطر AA' و مرکز O، وتری به طول ۱/۵ جدا می‌کند. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل می‌کشیم:



- فاصلهٔ کانونی (FF') برابر با ۲ بود، پس: $c = OF = OF' = 1$
- وتر BC برابر با ۱/۵ بود، پس: $BF = \frac{1/5}{2} = \frac{3}{4}$

گام دوم: در مثلث OBF، فیثاغورس می‌نویسیم تا OB به دست آید:

$$OB^2 = 1^2 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow OB = \frac{5}{4}$$

پس شعاع دایره $\frac{5}{4}$ و در نتیجه نصف قطر بزرگ بیضی هم $\frac{5}{4}$ است: $a = \frac{5}{4}$

گام سوم: خروج از مرکز برابر است با: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0/8$

تست و پاسخ 30

دو نقطهٔ $(-5,1)$ و $(11,1)$ دو سر کوچک‌ترین قطر یک بیضی هستند که طول بلندترین قطر آن ۲۰ است. اختلاف طول و عرض یکی از کانون‌های این بیضی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره نقطهٔ وسط دو سر قطر کوچک، مرکز بیضی می‌شود. از مرکز بیضی به اندازهٔ c باید بالا و پایین برویم تا به F و F' برسیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** طول بزرگ‌ترین قطر بیضی ۲۰ است: $2a = 20 \Rightarrow a = 10$

گام دوم: فاصلهٔ دو سر قطر کوچک را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} B(11,1) \\ B'(-5,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{قطرکوچک} = 2b = 11-(-5) = 16 \Rightarrow b = 8$$

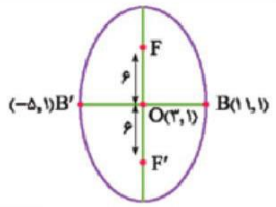
گام سوم: با داشتن $a=۱۰$ و $b=۸$، c را حساب می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۰۰=۶۴+c^۲ \Rightarrow c=۶$$

گام چهارم: نقطهٔ وسط دو سر قطر کوچک، مرکز بیضی را می‌دهد:

$$O=(\frac{B+B'}{۲})=(\frac{-۵+۱۱}{۲},\frac{۱+۱}{۲})=(۳,۱)$$

گام پنجم: چون نقاط دو سر قطر کوچک، yهای یکسانی دارند، یعنی بیضی قائم است:



گام ششم: از مرکز، ۶ واحد به بالا و پایین می‌رویم تا مختصات کانون‌ها به دست آید:

$F=(۳,۱+۶)=(۳,۷) \Rightarrow |x_F-y_F|=|۳-۷|=۴ \Rightarrow$ در گزینه‌هاست.

$F'=(۳,۱-۶)=(۳,-۵) \Rightarrow |x_{F'}-y_{F'}|=|۳-(-۵)|=۸$

تست و پاسخ 31

خط به معادلهٔ $x+y=۱$ از دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴y+a=۰$ وتری جدا می‌کند که طول آن با شعاع دایره برابر است. a کدام است؟

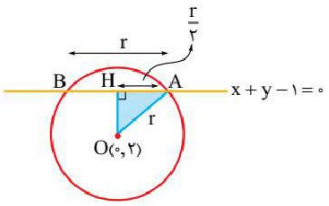
۱) ۳ ۲) $۳\frac{۱}{۳}$ ۳) $۳\frac{۲}{۳}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ دایره را استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+y^۲-۴y+a=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴y+۴=-a+۴ \Rightarrow x^۲+(y-۲)^۲=۴-a \Rightarrow \begin{cases} O=(۰,۲) \\ r^۲=۴-a \end{cases}$$

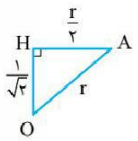
گام دوم: شکل فرضی می‌کشیم:



گام سوم: فاصلهٔ $O(۰,۲)$ از خط $x+y-۱=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$OH=\frac{|۰+۲-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

گام چهارم: در مثلث OHA، رابطهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:



$$\Rightarrow (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\frac{r}{۲})^۲=r^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{r^۲}{۴}=r^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}r^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow r^۲=\frac{۲}{۳}$$

گام پنجم: مقدار $r^۲$ از گام اول و چهارم را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} r^۲=۴-a \\ r^۲=\frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow ۴-a=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۳\frac{۱}{۳}$$

تست و پاسخ 32

منحنی به معادلهٔ $(۲x-۱)^۲+(۲y+۱)^۲=۲$، محور yها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند و معادلهٔ خط مماس بر منحنی در این نقطه، به صورت $ax+by+۲=۰$ است، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول**: دو طرف معادلهٔ دایره را به ۴ ساده می‌کنیم تا به فرم استاندارد معادلهٔ دایره برسیم:

$$(2x-1)^2+(2y+1)^2=2 \Rightarrow 4(x-\frac{1}{2})^2+4(y+\frac{1}{2})^2=2 \xrightarrow{\div 4} (x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}) \\ r^2=\frac{1}{2} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

گام دوم: برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد با محور yها، باید x را صفر بدهیم:

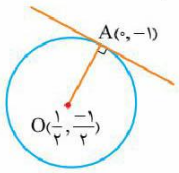
$$(0-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \Rightarrow (y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} |y+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=0 \times \\ y+\frac{1}{2}=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=-1 \checkmark \ (\text{عرض منفی}) \xrightarrow{\text{نقطه}} A(0,-1) \end{cases}$$

گام سوم: خط مماس بر دایره در نقطهٔ $A(0,-1)$، به شعاع گذرنده از این نقطه عمود است.

- شیب شعاع را حساب می‌کنیم:

$$m_{OA}=\frac{-1-(\frac{-1}{2})}{0-\frac{1}{2}}=1$$



- شیب شعاع را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب مماس به دست آید: $m_{\text{مماس}}=-1$

گام چهارم: معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} A(0,-1) \\ m=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-(-1)=-1(x-0) \Rightarrow x+y+1=0 \xrightarrow{\times 2} \underset{a}{2}x+\underset{b}{2}y+2=0$$

گام پنجم:

$$a+b=2+2=4$$

تست و پاسخ 33

دایره‌ای که بر دایرهٔ $x^2+y^2=1$ مماس داخل و بر دایرهٔ $x^2+y^2-6x+8=0$ مماس خارج است، خط $y=\frac{\sqrt{5}}{2}$ را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۱/۳ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینه ۳

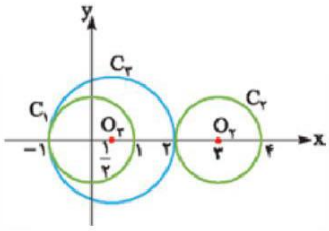
خودت حل کنی بهتره معادلهٔ دایره‌ها را استاندارد کنید و آن‌ها را روی دستگاه مختصات رسم کنید تا راحت بتوانید مرکز و شعاع دایرهٔ سوم را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول**: معادلهٔ دایره‌های داده‌شده را استاندارد می‌نویسیم و مرکز و شعاعشان را پیدا می‌کنیم:

$$C_1: x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} O_1=(0,0) \\ r_1=1 \end{cases}$$

$$C_2: x^2-6x+9+y^2=-8+9 \Rightarrow (x-3)^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} O_2=(3,0) \\ r_2=1 \end{cases}$$

گام دوم: شکل می‌کشیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} O_3=(\frac{1}{2},0) \\ r_3=\frac{3}{2} \end{cases}$$

گام سوم: معادلهٔ دایرهٔ $C_۳$ را می‌نویسیم:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲+(y-۰)^۲=(\frac{۳}{۲})^۲ \Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲+y^۲=\frac{۹}{۴}$$

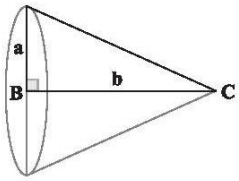
گام چهارم: $y=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲=\frac{۹}{۴} \Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲=۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-\frac{۱}{۲}|=۱ \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \text{ (طول مثبت)} \\ x-\frac{۱}{۲}=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲} \text{ (طول منفی)} \end{cases}$$

آزمون‌های سراسری گاج

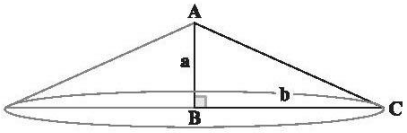
www.mapedu.ir

1 (۱) اگر در حول BC دوران دهیم، مخروط زیر به دست می‌آید.



$$V_1=\frac{\pi}{3}a^2b$$

اگر حول AB دوران دهیم.



$$V_2=\frac{\pi}{3}b^2a$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{\pi}{3}b^2a}{\frac{\pi}{3}a^2b}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{a}{b}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:(2\sqrt{ab})^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2+b^2-4ab=0$$

$$\xrightarrow{\div b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+1=0\Rightarrow\frac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}\xrightarrow{b>a}\frac{a}{b}=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}=2+\sqrt{3}$$

پس نسبت دو حجم به‌دست آمده $2+\sqrt{3}$ یا $2-\sqrt{3}$ خواهد بود.

2 (۲) مقطع موردنظر مستطیل ABCD است که:

$$AB=2$$

$$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$S_{ABCD}=2\sqrt{5}$$

3 (۱)

$$AA'=2FF'\Rightarrow 2a=4c\Rightarrow a=2c$$

محیط $MFF'=MF+MF'+FF'=2a+2c=4c+2c=6c$

4 (۳) قطرهای بیضی برهم عمودند پس: $a\times\frac{-1}{2}=-1\Rightarrow a=2$

پس یکی از محورهای تقارن بیضی (قطر بزرگ یا کوچک) $y=2x-1$ است.

چون دو نقطه A و B روی قطر بزرگ و همچنین روی بیضی قرار دارند پس دو سر قطر بزرگ‌اند.

$$2a=AB=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$$

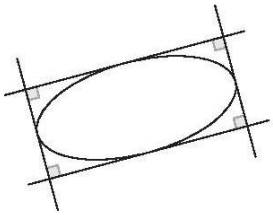
5 (۲) اگر قطر بزرگ $2a$، قطر کوچک $2b$ و فاصله کانونی $2c$ باشد آن‌گاه یکی از حالت‌ها به صورت زیر است.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=3e$$

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\Rightarrow e=\sqrt{1-9e^2}\Rightarrow e^2=1-9e^2$$

$$\Rightarrow 10e^2=1\Rightarrow e=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

6 (۴) چهار خط داده شده مانند شکل زیر خواهد بود.



حال اگر فاصله خط‌های موازی را حساب کنیم در واقع طول اقطار بیضی محاسبه خواهد شد. فاصله دو خط $\begin{cases}2x+y=5\\2x+y=0\end{cases}$ برابر است با:

$$AA'=\frac{|5-0|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=2a\Rightarrow a=\frac{5}{2\sqrt{5}}$$

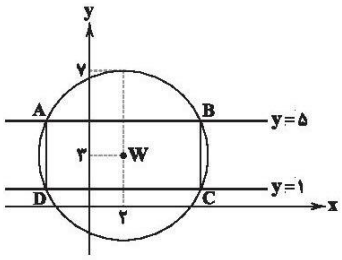
فاصله دو خط $\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=2\end{cases}$ برابر است با:

$$BB'=\frac{|2-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=2b\Rightarrow b=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{25}{20}-\frac{1}{20}=\frac{24}{20}=\frac{12}{10}=1/2\Rightarrow c=\sqrt{1/2}$$

$$\Rightarrow 2c=2\sqrt{1/2}$$

7 (۱) مرکز دایره $W(2,3)$ و شعاع آن ۴ است.



دو خط $y=1$ و $y=5$ نسبت به مرکز دایره متقارن هستند پس چهارضلعی ABCD مستطیل است.

$$|AD|=|BC|=5-1=4$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16\xrightarrow{y=1}(x-2)^2=12$$

$$\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{12}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{12}$$

$$|AB|=x_B-x_A=(2+\sqrt{12})-(2-\sqrt{12})=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

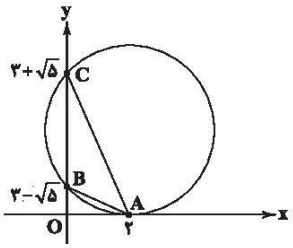
$$S_{ABCD}=4\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

8 (۱) چون دایره بر محور xها مماس است پس $r=|\beta|$ است.

$$\sqrt{(2)^2+(3)^2-4a}=3\Rightarrow 13-4a=9\Rightarrow a=1$$

حال برای محاسبه محل برخورد با محور yها به جای x عدد صفر قرار می‌دهیم:

$$x=0\Rightarrow y^2-6y+4=0\Rightarrow y=3\pm\sqrt{5}$$



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}OA\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۳+\sqrt{۵}-۳+\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}$$

9 ۳ مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(۲,۴)\,,\,r=\sqrt{۴+۱۶-k}=\sqrt{۲۰-k}$$

$$||AW|-r|=۶\Rightarrow|\sqrt{۹+۱۶}-\sqrt{۲۰-k}|=۶$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۵-\sqrt{۲۰-k}=۶\\ ۵-\sqrt{۲۰-k}=-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{۲۰-k}=-۱ \text{ غیرممکن}\\ \sqrt{۲۰-k}=۱۱\Rightarrow k=-۱۰۱\end{cases}$$

10 ۱ ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر باشند.

$$۲m^۲-۶m+۵=m^۲-m+۱\Rightarrow m^۲-۵m+۴=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ m=۴\end{cases}$$

$$m=۱\Rightarrow x^۲+y^۲+۴x+y+۲=۰\Rightarrow \text{شرط}:۴^۲+۱^۲>۴\times۲$$

$$m=۴\Rightarrow ۱۳x^۲+۱۳y^۲+۴x+y+۸=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+\frac{۴}{۱۳}x+\frac{۱}{۱۳}y+\frac{۸}{۱۳}=۰$$

$$\text{شرط}:(\frac{۴}{۱۳})^۲+(\frac{۱}{۱۳})^۲=\frac{۱۷}{۱۶۹}<۴\times\frac{۸}{۱۳}$$

به ازای $m=۴$ شرط دایره بودن برقرار نیست.

11 ۲

$$x^۲+y^۲+۲x+y+\frac{۱}{۸}=۰$$

$$\xrightarrow{y=x-۱}x^۲+(x-۱)^۲+۲x+x-۱+\frac{۱}{۸}=۰\Rightarrow ۲x^۲+x+\frac{۱}{۸}=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰}x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}$$

پس نقطهٔ تماس $A(-\frac{۱}{۴},-\frac{۵}{۴})$ است:

$$|OA|=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{۲۶}$$

12 ۴ تفاضل معادلات گسترده دو دایره، معادله وتر مشترک است.

$$(x^۲+y^۲+mx+y-۳)-(x^۲+y^۲+۴x+۲y-۳)=۰$$

$$\Rightarrow(m-۴)x-y=۰\Rightarrow y=(m-۴)x\xrightarrow{y=۶x}m=۱۰$$

13 ۳

$$(۱)^۲+(-۱)^۲+(۱)+۲(-۱)+m<۰\Rightarrow m<-۱$$

از طرفی شرط دایره بودن را نیز اعمال می‌کنیم.

$$(۱)^۲+۲^۲>۴m\Rightarrow m<\frac{۵}{۴}$$

اشتراک دو رابطه به دست آمده $m<-۱$ است.

14 ۳ قطر دایره از مرکز دایره عبور می‌کند. مرکز دایره $O(-۲,۴)$ است. شیب خط موردنظر هم $\tan ۳۰^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس معادله قطر موردنظر را می‌نویسیم:

$$y-۴=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x+۲)$$

حال در این معادله x را $\sqrt{۳}-۲$ قرار می‌دهیم:

$$x=\sqrt{۳}-۲\Rightarrow y-۴=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳}=۱\Rightarrow y=۵$$

15 ۲

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y+۱=۰\Rightarrow w(۲,-۱)\ ,\ r=\sqrt{۴+۱-۱}=۲$$

$$x^۲+y^۲-۱۰x-۶y+k=۰\Rightarrow w'(۵,۳)$$

$$r'=\sqrt{۲۵+۹-k}=\sqrt{۳۴-k}$$

اگر دو دایره مماس بیرون باشند، فاصله مرکزها برابر مجموع شعاع‌هاست.

$$|ww'|=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$|ww'|=r+r'\Rightarrow\sqrt{۳۴-k}+۲=۵$$

$$\Rightarrow\sqrt{۳۴-k}=۳\Rightarrow ۳۴-k=۹\Rightarrow k=۲۵$$

16 ۱

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}>۰\Rightarrow\frac{m^۲+۳-۴m}{۲-۴}>۰\Rightarrow m^۲-۴m+۳<۰\Rightarrow ۱<m<۳$$

17 ۲ شیب خط L را به دست می‌آوریم:

$$m_L=\frac{۰-۳}{۶-۰}=-\frac{۱}{۲}$$

چون خط L' بر خط L عمود است، پس شیب خط L' برابر ۲ است.

حال معادلهٔ دو خط L و L' را برخورد می‌دهیم:

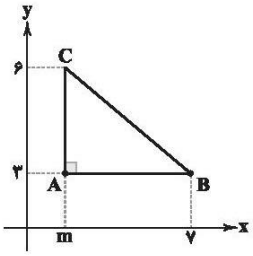
$$\begin{cases}L':y=۲x\\ L:y=-\frac{۱}{۲}x+۳\end{cases}\Rightarrow ۲x=-\frac{۱}{۲}x+۳$$

$$\xrightarrow{\times۲}۴x=-x+۶\Rightarrow x=\frac{۶}{۵}\,,\,y=\frac{۱۲}{۵}\Rightarrow H(\frac{۶}{۵},\frac{۱۲}{۵})$$

مجموع طول و عرض نقطهٔ H برابر است با:

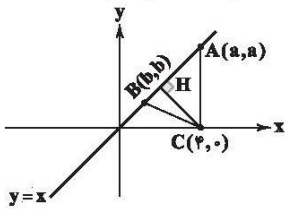
$$\frac{۱۲}{۵}+\frac{۶}{۵}=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶$$

18 ۱ به راحتی از شکل مسئله متوجه می‌شویم که $m=۲$ است.



$$\text{محیط}=AB+AC+BC=۵+۳+\sqrt{۳^۲+۵^۲}=۸+\sqrt{۳۴}$$

19 ۳ نقطهٔ A و B را روی خط $y=x$ به صورت $A(a\,,a)$ و $B(b\,,b)$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ A تا B را حساب می‌کنیم.



$$|AB|=\sqrt{(a-b)^۲+(a-b)^۲}=|a-b|\sqrt{۲}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times CH\times AB=\frac{۱}{۲}\frac{|۴-۰|}{\sqrt{۲}}|a-b|\sqrt{۲}=۸$$

$$\Rightarrow |a-b|=۴$$

20 ۴

$$\sqrt{(x-۳)^۲+(۲+۱)^۲}<۵\Rightarrow (x-۳)^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x-۳<۴$$
$$\Rightarrow -۱<x<۷$$

21 ۳ راه حل اول این است که معادلهٔ میانه‌ها را بنویسید و آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنید اما راه حل سریع‌تر: محل برخورد میانه‌های یک مثلث، میانگین سه رأس آن‌ها است:

$$G=\frac{۱}{۳}(A+B+C)=\frac{۱}{۳}(-۶+۰+۳\,,-۳+۴-۱)=(-۱\,,۰)$$

$$x_G+y_G=-۱$$

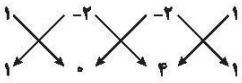
22 ۳ نقطهٔ A را به صورت $A(\alpha\,,۳\alpha-۱)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AH|=\frac{|۳\alpha+۴(۳\alpha-۱)+۴|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۶\Rightarrow |۱۵\alpha|=۳۰\Rightarrow \alpha=\pm ۲$$

$$\alpha=۲\Rightarrow A(۲\,,۵)$$

$$\alpha=-۲\Rightarrow A(-۲\,,-۷)$$

23 ۱ سه رأس را مرتب می‌نویسیم:



$$S=\frac{۱}{۲}|(۱\times ۰-۲\times ۴-۲\times ۱)-(-۲\times ۱-۲\times ۰+۱\times ۴)|$$

$$S=\frac{۱}{۲}|(-۱۰)-(+۲)|=۶$$

24 ۲ دو ضلع مقابل مربع، موازی هستند.

$$\frac{m}{۶}=\frac{m+۱}{۸}\Rightarrow m=۳$$

$$\begin{cases}۳x+۴y=۳\\ ۳x+۴y=۰\end{cases}\Rightarrow |HH'|=\frac{|۳-۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

$$S=|HH'|^۲=(۰/۶)^۲=۰/۳۶$$

25 ۳ باید طول نقطهٔ A مثبت و عرض آن منفی باشد.

$$\begin{cases}\frac{۴-a}{۴+a}>۰\Rightarrow -۴<a<۴\\ ۳-a<۰\Rightarrow a>۳\end{cases}\xrightarrow{\cap} ۳<a<۴$$

26 ۲ اگر قطرهای بیضی را ۲a و ۲b در نظر بگیریم. آن‌گاه:

$$S_{ABF}=\frac{۱}{۲}|OB|\times|FA|=\frac{b}{۲}(a-c)$$

$$\frac{b}{۲}(a-c)=۴\Rightarrow ab-bc=۸\xrightarrow[ab=۱۶]{۴ab=۶۴}۱۶-bc=۸$$

$$\Rightarrow bc=۸\xrightarrow{+ab}\frac{bc}{ab}=\frac{۸}{ab}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

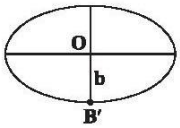
27 ۲ فاصلهٔ دو کانون برابر ۲c است.

$$۲c=|۳-(-۵)|=۸\Rightarrow c=۴$$

$$۲a=۱۲\Rightarrow a=۶$$

$$b^۲=a^۲-c^۲=۳۶-۱۶=۲۰\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}$$

مرکز بیضی $O=(-۱\,,۲)$ خواهد بود. کم‌ترین عرض در نقطهٔ B' خواهد بود.



$$B'=(-۱\,,۲-b)=(-۱\,,۲-۲\sqrt{۵})$$

28 ۳ قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد. مرکز دایره را حساب می‌کنیم:

$$O(\frac{-۴}{۲}\,,\frac{۶}{۲})\Rightarrow O(-۲\,,۳)$$

حال معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از O عبور کند و موازی خط $\frac{x}{۲}+y=۱۲$ باشد.

$$\frac{x}{۲}+y=۱۲\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

خط مطلوب: $y-۳=-\frac{۱}{۲}(x+۲)\Rightarrow ۲y-۶=-x-۲$

$$\Rightarrow ۲y+x=۴$$

29 ۲ مرکز دایره محل برخورد قطرهای آن است.

$$\begin{cases}x=y\\ ۲x+۳y=۱۰\end{cases}\Rightarrow ۲x+۳x=۱۰\Rightarrow x=y=۲$$

پس مرکز دایره $O(۲\,,۲)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر آن برابر شعاع دایره خواهد بود.

$$r=WO=\frac{|۳(۲)-۴(۲)+۸|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

$$\frac{۱/۲}{۰/۶}=۲$$

شعاع دایره دو برابر ۰/۶ است.

30 ۱ **روش اول:** اگر نقطهٔ $M(x_۰\,,y_۰)$ درون دایره $F(x\,,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ قرار گیرد در این صورت $F(x_۰\,,y_۰)<۰$ است.

$$F(x\,,y)=x^۲+y^۲-۲(x+۲y)-m$$

$$F(۲\,,-۱)=۴+۱-۲(۲-۲)-m<۰\Rightarrow m>۵$$

از طرفی شرط دایره بودن را نیز اعمال می‌کنیم:

$$a^۲+b^۲>۴c\Rightarrow ۴+۱۶>-۴m\Rightarrow ۴m>-۲۰\Rightarrow m>-۵$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $m>۵$ خواهد بود.

روش دوم: فاصلهٔ نقطهٔ A را تا مرکز دایره حساب کنید و آن را کم‌تر از شعاع دایره قرار دهید و با شرط دایره بودن اشتراک بگیرید.

31 **۳** اگر دو دایره متقاطع باشند، در این صورت با شرط برابر بودن ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ تفاضل معادلات آن‌ها وتر مشترک آن‌ها را می‌دهد.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲(x+y) \\ x^۲+y^۲=۲(۳x+y)+۴ \end{cases} \Rightarrow ۶x+۲y+۴=۲x+۲y$$

$$\Rightarrow ۴x=-۴ \Rightarrow x=-۱$$

32 **۲** دو ضلع مقابل مربع موازی‌اند، پس، فاصلهٔ این دو خط برابر طول ضلع مربع است، پس:

$$\begin{cases} ۳x+ay=۱۰ \xrightarrow{\times ۲} ۶x+۲ay-۲۰=۰ \\ ۶x-۹y=b \Rightarrow ۶x-۹y-b=۰ \end{cases}$$

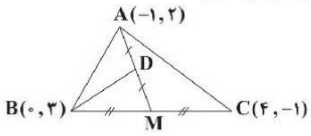
$$\Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۲۰+b|}{\sqrt{۳۶+۸۱}}=\frac{|b-۲۰|}{\sqrt{۱۱۷}}$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت مربع}} S=d^۲=\frac{(b-۲۰)^۲}{۱۱۷}=۱۳ \xrightarrow{۱۱۷=۹\times ۱۳}$$

$$(b-۲۰)^۲=۹\times ۱۳^۲ \Rightarrow b-۲۰=\pm ۳\times ۱۳ \Rightarrow b=۲۰\pm ۳\times ۱۳$$

$$\Rightarrow b_۱+b_۲=(۲۰+۳\times ۱۳)+(۲۰-۳\times ۱۳)=۴۰$$

33 **۲** شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases} M=\frac{B+C}{۲} \Rightarrow M(\frac{۰+۴}{۲},\frac{۳+(-۱)}{۲})=(۲,۱) \\ D=\frac{M+A}{۲} \Rightarrow D(\frac{۲+(-۱)}{۲},\frac{۱+۲}{۲})=(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}) \end{cases}$$

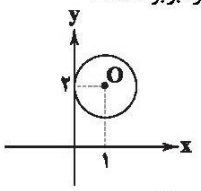
$$\Rightarrow BD=\sqrt{(\frac{۱}{۲}-۰)^۲+(\frac{۳}{۲}-۳)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+(\frac{۳-۶}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

34 **۱** با فرض این‌که r شعاع باشد، داریم:

$$\text{قطر}=۲r=AB \Rightarrow ۲r=\sqrt{(۰-(-۲))^۲+(۳-۵)^۲}$$

$$=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲r=۲\sqrt{۲} \Rightarrow r=\sqrt{۲}$$

۳۵ (۱) با توجه به اطلاعات سؤال، شعاع دایره برابر ۱ است.



معادله دایره: $(x-1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+4=0$

۳۶ (۲)

$x^2+y^2-3x-5y+k=0$

$a^2+b^2>4c \Rightarrow 9+25>4k \Rightarrow k<\frac{34}{4} \Rightarrow k<\frac{17}{2} \Rightarrow k<8/5$

تعداد اعداد طبیعی که در این رابطه صدق می‌کنند، ۸ تاست.

۳۷ (۴)

$$-\frac{\frac{m-1}{m+1}}{2}=-\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{m-1}{m+1}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3m-3=m+1 \Rightarrow m=2$$

$$-\frac{mn}{2}=-1 \xrightarrow{m=2} n=1$$

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}=\sqrt{\frac{1}{36}+1+m^2+n^2}=\sqrt{\frac{1}{36}+1+4+1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{36}+6}=\frac{1}{6}\sqrt{217}$$

۳۸ (۳)

$A: 1+1-6+2+m<0 \Rightarrow m<2$

$B: 1+4+6-4+m>0 \Rightarrow m>-7$

از طرفی شرط دایره بودن را هم در نظر می‌گیریم:

$36+4>4m \Rightarrow m<10$

اشتراک موارد به دست آمده $-7<m<2$ است.

۳۹ (۱) فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$r=\frac{|3(2)+4(-1)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$$

معادله دایره: $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$

$\Rightarrow (5x-10)^2+(5y+5)^2=1$

۴۰ (۱) مرکز دو دایره $W(2,1)$, $W'(-2,2)$ است. فاصله آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$d=|WW'|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

اکنون شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$r=\sqrt{4+1+4}=3 \qquad r'=\sqrt{4+4+1}=3$

بین d , r , r' رابطهٔ $|r-r'|<d<r+r'$ برقرار است بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۴۱ (۲) خط و دایره را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(2-x)^2=4 \Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

اکنون عرض نقاط برخورد را حساب می کنیم.

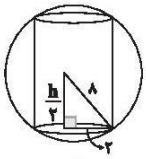
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0,2) \\ x=2 \Rightarrow y=0 \Rightarrow B(2,0) \end{cases} \Rightarrow |AB|=2\sqrt{2}$$

۴۲ (۲) حجم حاصل، استوانه‌ای با شعاع قاعده a و ارتفاع $a+1$ است.

$V=\pi r^2 h=\pi a^2(a+1)=2\pi \Rightarrow a^2(a+1)=2 \Rightarrow a=1$

بنابراین مساحت مستطیل 2×1 است.

۴۳ (۲)



$$\frac{h^2}{4}+4=64 \Rightarrow h^2=4\times60=4^2\times15$$

$$\Rightarrow h=4\sqrt{15}$$

$$V=\pi r^2 h=\pi\times4\times4\sqrt{15}=16\pi\sqrt{15}$$

۴۴ (۴)

$$\sin\alpha+\cos\alpha=1/4 \Rightarrow \frac{MF}{FF'}+\frac{MF'}{FF'}=\frac{7}{5} \Rightarrow \frac{MF+MF'}{5}=\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow MF+MF'=7 \Rightarrow 2a=7 \Rightarrow a=\frac{7}{2}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{5}{7}$$

۴۵ (۱) اگر صفحه مورد نظر در محل تقاطع محور و مولد عمود شود سطح مقطع یک نقطه و در غیر این صورت سطح مقطع دایره خواهد بود.

۴۶ (۳) محورهای تقارن بیضی بر هم عمودند بنابراین $k=1$ است. محل برخورد دو محور تقارن مرکز بیضی است.

$$\begin{cases} x+y=4n \\ x-y=m \end{cases} \xrightarrow{(3,-1)} \begin{cases} 3-1=4n \\ 3+1=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=\frac{1}{2} \\ m=4 \end{cases}$$

$m+n+k=4+\frac{1}{2}+1=5/5$

۴۷ (۴)

$2a=8 \Rightarrow a=4$

$2b=4 \Rightarrow b=2$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 16=4+c^2 \Rightarrow c=2\sqrt{3}$

محیط $MFF'=MF+MF'+FF'=2a+2c=8+4\sqrt{3}=4(2+\sqrt{3})$

۴۸ (۲)

$A'F'=F'F \Rightarrow a-c=2c \Rightarrow a=3c \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{3}$

۴۹ (۳)

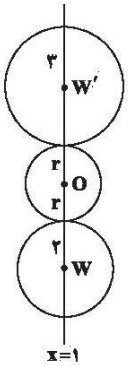
$x^2+y^2-2x-4y+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$

$\Rightarrow W(1,2), r=2$

$x^2+y^2-2x-18y+73=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-9)^2=9$

$\Rightarrow W'(1,9), r'=3$

مرکز هر سه دایره روی خط $x=1$ قرار دارد.



$WW'=3+2r+2$

$\Rightarrow 5+2r=9-2 \Rightarrow r=1$

طول نقطهٔ O برابر ۱ و عرض آن ۵ خواهد بود، بنابراین $O(1,5)$ است.

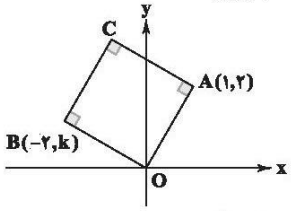
معادله دایره: $(x-1)^2+(y-5)^2=1$

۵۰ **۴** باید عرض نقطه کم‌تر از طول آن باشد.

$m^2 < 2m+3 \Rightarrow m^2-2m-3<0 \Rightarrow (m+1)(m-3)<0$

$\Rightarrow -1<m<3$

۵۱ **۳** OA بر OB عمود است. بنابراین:



$m_{OA}\times m_{OB}=-1 \Rightarrow \frac{k}{-2}\times\frac{2}{1}=-1 \Rightarrow k=1$

نقطه C روبه‌روی نقطه O قرار دارد.

$O+C=A+B \Rightarrow C=(1,2)+(-2,1)=(-1,3)$

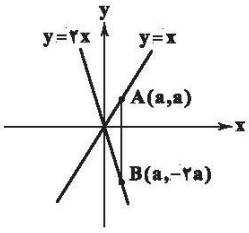
این نقطه روی خط $y=x+4$ قرار دارد.

۵۲ **۱**

$|AB|=3 \Rightarrow |3a|=3 \Rightarrow a=\pm 1$

$y_A+y_B=-a$

اگر A در ناحیه اول و B در ناحیه چهارم باشد، $a>0$ است واگر A در ناحیه سوم و B در ناحیه دوم باشد، $a<0$ است.



۵۳ **۳** دو ضلع مجاور بر هم عمودند.

$m\times 3=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=3x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow 3x-1=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} 9x-3=-x-2$

$\Rightarrow 10x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow y=\frac{3}{10}-1=-\frac{7}{10} \Rightarrow A(\frac{1}{10},-\frac{7}{10})$

$|OA|=\sqrt{(\frac{1}{10})^2+(-\frac{7}{10})^2}=\sqrt{\frac{50}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۴ **۳** دو خط $y=\frac{x}{2}+2$ و $y=a-x$ روی محور yها متقاطع‌اند پس:

$a-0=0+2 \Rightarrow a=2$

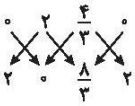
مختصات نقطه A به صورت $A(0,2)$ تبدیل می‌شود. حال نقطه C را حساب می‌کنیم.

$\frac{x}{2}+2=8-4x \Rightarrow \frac{9}{2}x=6 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow y=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3} \Rightarrow C(\frac{4}{3},\frac{8}{3})$

نقطهٔ B هم به صورت $B(2,0)$ خواهد بود.

حال مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:



$=(0+\frac{16}{3}+\frac{8}{3})-(4+0+0)=4$

$S=\frac{1}{2}\times 4=2$

۵۵ **۱**

$|AB|=|AC| \Rightarrow |a-3|=\sqrt{(a+3)^2+4}$

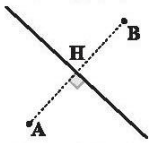
$\Rightarrow a^2-6a+9=a^2+6a+9+4$

$\Rightarrow 12a=-4 \Rightarrow a=-\frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

فاصلهٔ A از مبدأ برابر است با:

$|AO|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{17}$

۵۶ **۲** معادله خط گذرا از A و عمود بر $x+y=3$ را می‌نویسیم:



$AB: y+3=+1(x-4) \Rightarrow x-y=7$

حال برای محاسبه نقطه H دو خط را قطع می‌دهیم:

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=10 \Rightarrow x=5,\ y=-2$

پس $H(5,-2)$ است.

$B=2H-A=(10,-4)-(4,-3)=(6,-1)$

۵۷ **۱** مختصات نقطه N به صورت $N(-4,2)$ به دست می‌آید.

فاصله نقطه $M(0,4)$ را از خط $y=-\frac{x}{2}$ حساب می‌کنیم.

$y=-\frac{x}{2} \Rightarrow x+2y=0$

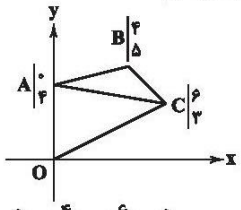
$|MH|=\frac{|0+8|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

حال اندازه $|NO|$ را حساب می‌کنیم.

$|NO|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$S=\frac{1}{2}|MH|\times|NO|=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\sqrt{5}}\times 2\sqrt{5}=8$

۵۸ **۳** مساحت مثلث ABC را حساب می‌کنیم:



$\Rightarrow (0+12+24)-(16+30+0)=-10$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

اکنون مساحت مثلث OAC را حساب می‌کنیم. $S_{OAC}=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$

مساحت کل چهارضلعی برابر است. $S=5+12=17$

۵۹ **۳** شیب BC و معادله آن را می‌نویسیم:

$m_{BC}=\frac{4-1}{0+1}=3$

$BC: y-4=3x \Rightarrow 3x-y+4=0$

فاصله A از ضلع BC جواب سؤال است.

$AH=\frac{|6-0+4|}{\sqrt{9+1}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

۶۰ ۳

$$FA\times FA'=۳۳\Rightarrow (a-c)(a+c)=۳۳$$

$$\Rightarrow a^۲-c^۲=۳۳$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲}=\frac{۱۶}{۴۹}\Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲-c^۲}=\frac{۱۶}{۴۹-۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{c^۲}{۳۳}=\frac{۱۶}{۳۳}\Rightarrow c^۲=۱۶\Rightarrow c=۴$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۷}\xrightarrow{c=۴}a=۷$$

محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با:

$$MF+MF'+NF+NF'=۲a+۲a=۴a=۲۸$$

۶۱ ۴ محل برخورد قطرها مرکز دایره است.

$$\begin{cases}۳x-y=۷\\ ۴x+۳y=۵\end{cases}\Rightarrow w(۲,-۱)$$

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$r=\frac{|۳(۲)+۴(-۱)+۸|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۲$$

معادلهٔ دایره: $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x+۲y+۱=۰$

۶۲ ۴

$$۱+۱>\frac{۴(۱-k)}{k+۲}\Rightarrow \frac{۲-۲k}{k+۲}-۱<۰\Rightarrow \frac{-۳k}{k+۲}<۰$$

$$\Rightarrow k\in(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$$

بنابراین اعداد صحیح $\{-۲,-۱,۰\}$ را شامل نمی‌شود.

۶۳ ۳

$$MF+MF'+FF'=۶\Rightarrow ۲a+۲c=۶\Rightarrow a+c=۳$$

$$FA\times FA'=۳\Rightarrow (a-c)(a+c)=۳\xrightarrow{a+c=۳}a-c=۱$$

$$\begin{cases}a-c=۱\\ a+c=۳\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=۲\\ c=۱\end{cases}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$